§ 1. Normen und Metriken

Erinnerung:

Definition (16.10)

Eine Norm auf einem $\mathbb{R}$-Vektorraum V ist eine Abbildung $\|\cdot\| : V \to \mathbb{R}_+$ mit den folgenden Eigenschaften.

(i) Für jedes $v \in V$ gilt $\|v\| = 0$ genau dann, wenn $v = 0_V$ ist.

(ii) Es gilt $\|\lambda v\| = |\lambda| \|v\|$ für alle $\lambda \in \mathbb{R}$ und $v \in V$.

(iii) Für alle $v, w \in V$ gilt $\|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|$.

Äquivalenz von Normen

Definition (1.5)

Zwei Normen $\|\cdot\|$ und $\|\cdot\|'$ auf einem $\mathbb{R}$-Vektorraum V werden als äquivalent bezeichnet, wenn reelle Konstanten $\gamma_1, \gamma_2 > 0$ mit der Eigenschaft

$$\gamma_1\|x\| \quad \leq \quad \|x\|' \quad \leq \quad \gamma_2\|x\| \qquad \text{für alle } x \in V \text{ existieren.}$$

Offenbar gleichwertig mit dieser Bedingung ist die Existenz von reellen Konstanten $\delta_1, \delta_2 > 0$ mit $\|x\| \leq \delta_1\|x\|'$ und $\|x\|' \leq \delta_2\|x\|$ für alle $x \in V$.

Geometrische Interpretation der Normäquivalenz, Teil I

Für alle $r \in \mathbb{R}^+$ und $a \in V$ bezeichnen wir mit

$$B_{\|\cdot\|,r}(a) \quad = \quad \{x \in V \mid \|x - a\| < r\}$$

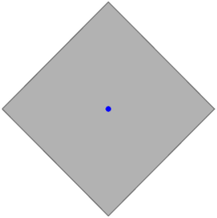
bzw.

$$\bar{B}_{\|\cdot\|,r}(a) \quad = \quad \{x \in V \mid \|x - a\| \leq r\}$$

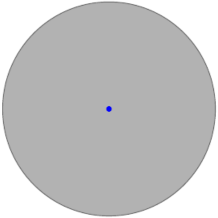
den offenen bzw. abgeschlossenen Ball vom Radius r um den Punkt a bezüglich der Norm $\| \cdot \|$.

Proposition (1.6)

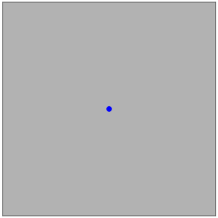
Sei $\delta \in \mathbb{R}^+$. Dann ist die Ungleichung $\|x\|' \leq \delta\|x\|$ für alle $x \in V$ gleichbedeutend mit $B_{\|\cdot\|,r}(a) \subseteq B_{\|\cdot\|',\delta r}(a)$ für $a \in V$ und $r \in \mathbb{R}^+$. Eine entsprechende Aussage gilt auch für die abgeschlossenen Bälle.



$\{x \in \mathbb{R}^2 \mid \|x\|_1 \leq 1\}$



$\{x \in \mathbb{R}^2 \mid \|x\|_2 \leq 1\}$



$\{x \in \mathbb{R}^2 \mid \|x\|_\infty \leq 1\}$

Def. V $\mathbb{R}$-Vektorraum, $\|\cdot\|$, $\|\cdot\|'$ Normen auf V

$\|\cdot\|$, $\|\cdot\|'$ äquivalent $\Leftrightarrow$ $\exists$ Konstanten $\gamma_1, \gamma_2 \in \mathbb{R}^+$

mit $\gamma_1 \|v\| \leq \|v\|' \leq \gamma_2 \|v\| \quad \forall v \in V$

offenbar gleichbedeutend: $\exists\, \delta_1, \delta_2 \in \mathbb{R}^+$ mit

$\|v\|' \leq \delta_1 \|v\|$ und $\|v\| \leq \delta_2 \|v\|' \quad \forall v \in V$

Bem. „Äquivalenz von Normen" ist eine Äquivalenzrelation auf der Menge der Normen

Bsp Transitivität: $\|\cdot\|$ äquiv. zu $\|\cdot\|'$, $\|\cdot\|'$ zu $\|\cdot\|''$

z.zg.: $\|\cdot\|$ äquivalent zu $\|\cdot\|''$

Vor $\Rightarrow$ $\exists$ Konstanten $\delta_1, \delta_2, \delta_3, \delta_4 \in \mathbb{R}^+$ mit

$\|v\|' \leq \delta_1 \|v\|$, $\|v\|' \leq \delta_2 \|v\|$, $\|v\|'' \leq \delta_3 \|v\|'$ und

$\|v\|'' \leq \delta_4 \|v\|' \Rightarrow \|v\|'' \leq \delta_1 \delta_3 \|v\|$ und

$\|v\| \leq \delta_2 \delta_4 \|v\|''$ $(\Rightarrow$ Beh.$)$

<u>Prop. (1.6)</u> Sei $\delta \in \mathbb{R}^+$. Dann gilt die Äquiv

$$\|x\|' \leq \delta \|x\| \ \forall x \in V \iff B_{\|\cdot\|, r}(a) \subseteq B_{\|\cdot\|', \delta r}(a)$$

für alle $a \in V$, $r \in \mathbb{R}^+$

„$\Rightarrow$" Sei $y \in B_{\|\cdot\|, r}(a) \Rightarrow \|y-a\| < r \Rightarrow$

$\|y-a\|' \overset{\text{Vor}}{\leq} \delta \|y-a\| < \delta r \Rightarrow y \in B_{\|\cdot\|', \delta r}(a)$

„$\Leftarrow$" Ang die Vor. ist erfüllt, aber $\|x\|' > \delta \|x\|$ für ein $x \in V$

Betrachte $a = 0_V$, $r = \|x\|'$. $\|\delta x\| = \delta \|x\| < r \Rightarrow$

$\delta x \in B_{\|\cdot\|, r}(0_V)$ aber: $\|x\|' = r \Rightarrow \|\delta x\|' = \delta r \Rightarrow \delta x \notin B_{\|\cdot\|', \delta r}(0_V)$ $\square$

Die Inklusion ist also nicht erfüllt

Äquivalenz von Normen auf dem $\mathbb{R}^n$

Lemma (1.8)

Seien V, W zwei $\mathbb{R}$-Vektorräume, $\phi : W \to V$ eine injektive lineare Abbildung und $\|\cdot\|$ eine Norm auf V. Dann ist durch $\|w\|' = \|\phi(w)\|$ eine Norm auf W definiert.

Satz (1.7)

Auf jedem endlich-dimensionalen $\mathbb{R}$-Vektorraum V sind je zwei Normen äquivalent.

Lemma (1.8) V, W $\mathbb{R}$-Vektorraum, $\phi: W \to V$ injektive lineare Abb., Dann ist durch $\|w\|' = \|\phi(w)\|$ eine Norm auf W definiert.

Bew: zu überprüfen $\forall v, w \in W, \lambda \in \mathbb{R}$:

(i) $\|v\|' = 0 \iff v = 0_W$ (ii) $\|\lambda v\|' = |\lambda| \|v\|'$

(iii) $\|v+w\|' \leq \|v\|' + \|w\|'$ Seien also $v, w \in V$ und $\lambda \in \mathbb{R}$ vorgeg. zu (i) „$\Leftarrow$" $\|0_W\|' = \|\phi(0_W)\| = \|0_V\| = 0$ [$\|\|$ Norm]

„$\Rightarrow$" Vor. $\|v\|' = 0 \Rightarrow \|\phi(v)\| = 0 \Rightarrow \phi(v) = 0_V \underset{\phi \text{ inj.}}{\Rightarrow} v = 0_W$

zu (ii) $\|\lambda v\|' = \|\phi(\lambda v)\| = \|\lambda \phi(v)\| = |\lambda| \|\phi(v)\| = |\lambda| \|v\|'$

zu (iii) $\|v+w\|' = \|\phi(v+w)\| = \|\phi(v) + \phi(w)\| \leq \|\phi(v)\| + \|\phi(w)\|$ $\square$

$= \|v\|' + \|w\|'$

Satz (1.7) Auf jedem endl.-dim. $\mathbb{R}$-Vektorraum V sind je zwei Normen äquivalent.

Bew. Betrachte zunächst nur $V = \mathbb{R}^d$. Es genügt z. zg., dass jede bel. vorgeg. Norm $\| \ \|$ auf V äquivalent zur 1-Norm $\| \cdot \|_1$. Grund: „Äquivalenz" ist Äquivalenzrel.

zu zeigen: $\exists$ Konstanten $\delta_1, \delta_2 \in \mathbb{R}^+$ mit $\|v\| \leq \delta_1 \|v\|_1$ $(*_1)$ und $\|v\|_1 \leq \delta_2 \|v\|$ $(*_2)$ $\forall v \in V$

zu (i) Sei $v \in \mathbb{R}^d$. $\rightarrow v = \sum_{j=1}^{d} v_j e_j \rightarrow \|v\| \leq \sum_{j=1}^{d} \|v_j e_j\|$ $\leq \sum_{j=1}^{d} |v_j| \, \|e_j\|$

Setze $\delta_1 = \max\{\|e_1\|, \ldots, \|e_d\|\} \in \mathbb{R}^+$

$\Rightarrow \|v\| \leq \delta_1 \cdot \sum_{j=1}^{d} |v_j| \rightarrow \|v\| \leq \delta_1 \|v\|_1$

zu (ii) Betrachte $S = \{ w \in \mathbb{R}^d \mid \|w\|_1 = 1 \}$.

Definiere $\gamma = \inf \{ \|w\| \mid w \in S \}$

Ang $\gamma > 0$. Beh: Dann gilt $\|v\|_1 \leq \delta_2 \|v\|$ für $\delta_2 = \gamma^{-1}$ für alle $v \in V$. denn: Sei $v \in V$, o.B.d.A. $v \neq 0_{\mathbb{R}^d}$

Sei $v_0 = \frac{1}{\|v\|_1} v \Rightarrow \|v_0\|_1 = 1 \Rightarrow v_0 \in S \Rightarrow \|v_0\| \geq \gamma$

$\Rightarrow \left\| \frac{1}{\|v\|_1} v \right\| \geq \gamma \Rightarrow \frac{1}{\|v\|_1} \|v\| \geq \gamma \Rightarrow \|v\| \geq \gamma \|v\|_1 \Rightarrow$

$\Rightarrow \|v\|_1 \leq \gamma^{-1} \|v\| = \delta_2 \|v\|$ z.zg. also: $\gamma > 0$

Ang $\gamma = 0 \Rightarrow \exists$ Folge $(w^{(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ in S mit $\lim_{n \to \infty} \|w^{(n)}\| = 0$

Für jedes $w \in S$ gilt $w_j \in [-1, 1]$, $1 \leq j \leq d$

Definition der metrischen Räume

Definition (1.9)

Sei X eine Menge. Eine Metrik auf X ist eine Abbildung $d : X \times X \to \mathbb{R}_+$ mit den folgenden Eigenschaften.

(i) Für alle $x, y \in X$ gilt $d(x, y) = 0$ genau dann, wenn $x = y$ ist.

(ii) Es gilt $d(x, y) = d(y, x)$ für alle $x, y \in X$.

(iii) Für alle x, y, z gilt $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$. *(Dreiecksungleichung)*

Das Paar (X, d) bezeichnet man als metrischen Raum.

Definition der offenen und abgeschlossenen Bälle

Definition (1.10)

Sei (X, d) ein metrischer Raum. Für jeden Punkt $x \in X$ und jede Zahl $r \in \mathbb{R}^+$ bezeichnet man $B_r(x) = \{y \in X \mid d(x, y) < r\}$ bzw. $\bar{B}_r(x) = \{y \in X \mid d(x, y) \leq r\}$ als den offenen bzw. den abgeschlossenen Ball vom Radius r um den Punkt x.

Definition der induzierten Metrik

Proposition (1.11)

Sei $(V, \|\cdot\|)$ ein normierter Raum und $X \subseteq V$ eine Teilmenge. Dann ist durch die Definition $d(x,y) = \|x-y\|$ für $x, y \in X$ eine Metrik auf X gegeben. Man nennt sie die von der Norm $\|\cdot\|$ *induzierte* Metrik.

Beispiel: diskrete Metrik auf einer Menge

Definition (1.12)

Auf jeder Menge X ist die diskrete Metrik δ_X folgendermaßen definiert: Für alle $x \in X$ ist $\delta_X(x,x) = 0$, und für alle $x, y \in X$ mit $x \neq y$ setzt man $\delta_X(x,y) = 1$.

Anmerkung: Die diskrete Metrik ist keine induzierte Metrik.

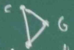
Def (1.10) Sei X eine Menge. Eine Metrik auf X ist eine Abb. $d: X \times X \to \mathbb{R}_+$ mit den Eigenschaften

(i) $d(a,b) = 0 \iff a = b$

(ii) $d(a,b) = d(b,a)$

(iii) $d(a,c) \leq d(a,b) + d(b,c)$ $\quad \forall a,b,c \in X$

„Dreiecks-Ungl."



Prop. (1.11) Sei V ein $\mathbb{R}$-VR und $\|\cdot\|$ eine Norm auf V. Dann ist durch $d(v,w) = \|w - v\|$ eine Metrik auf V definiert, die sog. induzierte Metrik.

Bew.: überprüfe die Bed (i), (ii), (iii) von oben

Seien $u, v, w \in V$.

$\|v\| = \|v - 0_V\| = \delta_V(0_V, v) = 1 \Rightarrow \|2v\| = |2|\,\|v\| = 2$

<u>zu (i)</u> $d(u,v) = 0 \Leftrightarrow \|v-u\| = 0 \overset{\|\,\|\text{ Norm}}{\Leftrightarrow} v-u = 0_V \Leftrightarrow v = u$

<u>zu (ii)</u> $d(u,v) = \|v-u\| = \|(-1)(u-v)\| = |-1|\,\|u-v\|$
$= \|u-v\| = d(v,u)$

<u>zu (iii)</u> $d(u,w) = \|w-u\| = \|w-v+v-u\| \leq \|w-v\| + \|v-u\|$
$= d(v,w) + d(u,v)$ insg.: d ist Metrik $\square$

<u>Prop. (1.12)</u> Sei X eine Menge. Dann ist durch

$$\delta_X(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{falls } x = y \\ 1 & \text{falls } x \neq y \end{cases}$$

eine Metrik auf X gegeben.

Bew.: Überprüfe die Eig. (i), (ii), (iii) einer Metrik.

Seien $x, y, z \in X$ vorgeg.

zu (i) $\delta_X(x,y) = 0 \overset{\text{Def. von } \delta_X}{\Longleftrightarrow} x = y$

zu (ii) 1. Fall: $x = y \Rightarrow \delta_X(x,y) = 0 = \delta_X(y,x)$

2. Fall: $x \neq y \Rightarrow \delta_X(x,y) = 1 = \delta_X(y,x)$

zu (iii) z. zg.: $\delta_X(x,z) \leq \delta_X(x,y) + \delta_X(y,z)$

1. Fall: $x \neq y$ oder $y \neq z \Rightarrow \delta_X(x,y) + \delta_X(y,z) \geq 1 \geq \delta_X(x,z)$

2. Fall: $x = y = z \rightarrow \delta_X(x,z) = 0 \leq 0 + 0 = \delta_X(x,y) + \delta_X(y,z)$ $\square$

Bem.: Ist V ein $\mathbb{R}$-Vektorraum $\neq \{0_V\}$, dann ist die diskrete Metrik δ_V nicht durch eine Norm induziert.

denn: Ang. δ_V wird von einer Norm $\|\cdot\|$ induziert. Sei $v \in V \setminus \{0_V\}$

$\Rightarrow \|v\| = \|v - 0_V\| = \delta_V(0_V, v) = 1 \Rightarrow \|2v\| = |2|\|v\| = 2$

Bem.: Ist V ein $\mathbb{R}$-Vektorraum $\neq \{0_V\}$, dann ist die diskrete Metrik δ_V nicht durch eine Norm induziert

andererseits: $\|2v\| = \|2v - 0_V\| = \delta_V(0_V, 2v) \overset{0_V \neq 2v}{=} 1$ $\lightning$ zu $\|2v\| = 2$ von oben $\square$

Def. Ist d eine Metrik auf einer Menge X und $a \in X$, $r \in \mathbb{R}^+$, dann nennt

$B_r(a) = \{x \in X \mid d(a,x) < r\}$ den <u>offenen Ball</u> vom Radius r um a

und

$\overline{B}_r(a) = \{x \in X \mid d(a,x) \leq r\}$ den <u>abgeschlossenen Ball</u> vom Radius r um a

Bsp.: Sei X eine bel. Menge, δ_X die diskrete Metrik. Sei $a \in X$ bel.

$$B_r(a) = \begin{cases} \{a\} & \text{für } r \leq 1 \\ X & r > 1 \end{cases} \qquad \overline{B}_r(a) = \begin{cases} \{a\} & \text{für } r < 1 \\ X & \text{für } r \geq 1 \end{cases}$$