Definition der positiv definiten Matrizen

Definition (16.13)

Eine Matrix $A \in \mathscr{M}_{n,\mathbb{R}}$ wird als positiv definit bezeichnet, wenn die (eindeutig bestimmte) Bilinearform b auf $\mathbb{R}^n$ mit der Darstellungsmatrix $\mathscr{M}_{\mathscr{E}_n}(b) = A$ bezüglich der Einheitsbasis $\mathscr{E}_n$ positiv definit ist.

Dies ist gleichbedeutend mit ${}^{\mathrm{t}}vAv > 0$ für alle $v \neq 0_{\mathbb{R}^n}$.

Das Hurwitz-Kriterium für positiv definite Matrizen

Satz (16.14)

Sei $A \in \mathscr{M}_{n,\mathbb{R}}$ eine symmetrische Matrix und A_k jeweils die linke obere $k \times k$-Teilmatrix, für $1 \leq k \leq n$. Genau dann ist A positiv definit, wenn $\det(A_k) > 0$ für $1 \leq k \leq n$ erfüllt ist.

Definition orthogonaler und selbstadjungierter Endomorphismen

Definition (16.15)

Sei (V, b) ein euklidischer Vektorraum. Man bezeichnet einen Endomorphismus ϕ von V als orthogonal, wenn $b(\phi(v), \phi(w)) = b(v, w)$ für alle $v, w \in V$ gilt, und symmetrisch oder auch selbstadjungiert, wenn $b(\phi(v), w) = b(v, \phi(w))$ für alle $v, w \in V$ gilt.

Darstellungsmatrizen orthogonaler und selbstadjungierter Endomorphismen

Lemma (16.16)

Eine Matrix $A \in \mathscr{M}_{n,\mathbb{R}}$ ist symmetrisch genau dann, wenn $\langle Av, w\rangle = \langle v, Aw\rangle$ für alle $v, w \in \mathbb{R}^n$ erfüllt ist.

Proposition (16.17)

Sei (V, b) ein euklidischer Vektorraum, $\mathscr{B}$ eine ON-Basis von V, $\phi : V \to V$ ein Endomorphismus und $A = \mathscr{M}_{\mathscr{B}}(\phi)$. Der Endomorphismus ϕ ist genau dann orthogonal, wenn A orthogonal ist und genau dann selbstadjungiert, wenn A symmetrisch ist.

Beweis von Lemma (16.16): Sei $A \in M_{n,K}$, $A = (a_{kl})$

<u>Beh.</u>: A symmetrisch $\iff \langle A e_k, e_l \rangle = \langle e_k, A e_l \rangle$

„$\Longleftarrow$" $\langle A e_k, e_l \rangle = \langle a_{\circ k}, e_l \rangle = a_{lk}$

$\langle e_k, A e_l \rangle = \langle e_k, a_{\circ l} \rangle = a_{kl}$

also: $\langle A e_k, e_l \rangle = \langle e_k, A e_l \rangle \Rightarrow a_{lk} = a_{kl} \;\; \forall k, l \in \{1, \dots, n\} \Rightarrow A$ symmetrisch

„$\Longrightarrow$" A symm. $\Rightarrow a_{lk} = a_{kl} \;\; \forall k, l \Rightarrow \langle A e_k, e_l \rangle = \langle e_k, A e_l \rangle \;\; \forall k, l$

<u>Beh</u>: A symmetrisch $\Rightarrow \langle A v, w \rangle = \langle v, A w \rangle \;\; \forall v, w \in K^n$

„$\Longleftarrow$" Vor $\Rightarrow \langle A e_k, e_l \rangle = \langle e_k, A e_l \rangle \overset{\text{s.o.}}{\Longrightarrow} A$ symm.

„$\Longrightarrow$" Vor. $\overset{\text{s.o.}}{\Longrightarrow} \langle A e_k, e_l \rangle = \langle e_k, A e_l \rangle$

Seien $v, w \in K^n$, $v = \sum_{k=1}^{n} v_k e_k$, $w = \sum_{l=1}^{n} w_l e_l$

$$\langle Av, w \rangle = \langle A\left(\sum v_k e_k\right), \sum_{l=1}^{n} w_l e_l \rangle =$$

$$\langle \sum_{k=1}^{n} v_k A e_k, \sum_{l=1}^{n} w_l e_l \rangle = \sum_{k=1}^{n} \sum_{l=1}^{n} v_k w_l \langle A e_k, e_l \rangle$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \sum_{l=1}^{n} v_k w_l \langle e_k, A e_l \rangle = \dots = \langle v, Aw \rangle \qquad \square$$

Eine Sesquilinearform auf dem $\mathbb{C}^n$

Sei $\langle\cdot,\cdot\rangle : \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$ die Abbildung definiert durch

$$\langle v, w\rangle \quad = \quad \sum_{k=1}^{n} \bar{v}_k w_k \qquad \text{für} \quad v = (v_1, ..., v_n),\ w = (w_1, ..., w_n).$$

Die erfüllt für alle $v, v', w, w' \in \mathbb{C}^n$ und $\lambda \in \mathbb{C}$ die Rechenregeln

- $\langle v + v', w\rangle = \langle v, w\rangle + \langle v', w\rangle$
- $\langle v, w + w'\rangle = \langle v, w\rangle + \langle v, w'\rangle$
- $\langle \lambda v, w\rangle = \bar{\lambda}\langle v, w\rangle$
- $\langle v, \lambda w\rangle = \lambda\langle v, w\rangle$
- $\langle w, v\rangle = \overline{\langle v, w\rangle}$

Ist V ein $\mathbb{C}$-Vektorraum, dann bezeichnet man eine Abbildung $b : V \times V \to \mathbb{C}$ mit solchen Eigenschaften als hermiteschen Sesquilinearform.

Der Satz über die Hauptachsentransformation

Proposition (16.18)

Jede symmetrische Matrix $A \in \mathscr{M}_{n,\mathbb{R}}$ besitzt einen reellen Eigenwert.

Satz (16.19)

Sei $A \in \mathscr{M}_{n,\mathbb{R}}$ symmetrisch. Dann gibt es eine orthogonale Matrix T, so dass $D = {}^{\mathrm{t}}TAT$ eine Diagonalmatrix ist.

selbstadjungiert, dann gibt es eine ON-Basis aus Eigenvek-

Bew. von Prop. (16.18): Sei $A \in M_{n,\mathbb{R}}$ symmetrisch

zzg.: A hat einen reellen Eigenwert

Betrachte A in $M_{n,\mathbb{C}}$ $\Rightarrow$ $\chi_A \in \mathbb{C}[x]$ hat eine Nullstelle $\lambda \in \mathbb{C}$ $\Rightarrow$ λ ist Eigenwert von A. Sei $0 \neq v \in \mathbb{C}^n$ ein zugehöriger Eigenvektor. Zerlegung von v in Real- und Imaginärteil $\Rightarrow$ $\exists\, u, w \in \mathbb{R}^n$ mit $v = u + iw$

$$\Rightarrow \bar{\lambda}\langle v,v\rangle = \langle \lambda v, v\rangle = \langle Av, v\rangle = \langle A(u+iw), u+iw\rangle$$
$$= \langle Au + iAw, u+iw\rangle = \langle Au,u\rangle + \langle iAw, u\rangle +$$
$$\langle Au, iw\rangle + \langle iAw, iw\rangle = \langle Au,u\rangle - i\langle Aw,u\rangle +$$
$$i\langle Au, w\rangle + \langle Aw, w\rangle = \langle u, Au\rangle - i\langle w, Au\rangle +$$
$$i\langle u, Aw\rangle + \langle w, Aw\rangle = \dots = \langle v, Av\rangle = \langle v, \lambda v\rangle = \lambda\langle v,v\rangle \xRightarrow{\langle v,v\rangle \neq 0}$$

$$\boxed{\bar{\lambda} = \lambda \Rightarrow \lambda \in \mathbb{R}}$$
$\square$

adj. Endomorphismus

Bew von Satz (16.19).

Sei (V, b) ein endl-dim euklidischer Vektorraum.

Zeigen durch vollst. Ind. über $n = \dim V$: Ist $\phi \in \mathrm{End}_{\mathbb{R}}(V)$ selbstadjungiert, dann gibt es eine ON-Basis aus Eigenvektoren von ϕ für V.

Ind-Anf $n = \dim V = 1$: Ist $v_1 \in V$ normiert, dann ist (v_1) eine ON-Basis und v_1 ein Eigenvektor von ϕ.

Ind-Schritt $n \Rightarrow n+1$: Sei $\dim V = n+1$, $\phi \in \mathrm{End}_{\mathbb{R}}(V)$ selbst-adjungiert. Sei $\mathcal{B}$ eine ON-Basis von V. s.o. $\Rightarrow A = M_{\mathcal{B}}(\phi)$ ist symm. (16.18) $\Rightarrow$ A, und somit auch ϕ, hat einen reellen Eigenwert λ. Sei v_1 ein zugehöriger, normierter Eigenvektor.

Betrachte $U = \{ v \in V \mid b(v_1, v) = 0 \}$

U ist der Kern der lin. Abb. $\psi: V \to \mathbb{R},\ v \mapsto b(v_1, v)$

$\Rightarrow U$ ist Untervektorraum. ψ ist surjektiv, denn für vorgeg. $a \in \mathbb{R}$ gilt $\psi(av_1) = b(v_1, av_1) = a\, b(v_1, v_1) = a \cdot 1 = a$

Dimensionssatz $\Rightarrow \dim U = \dim \ker(\psi) = \dim V - \dim \mathbb{R}$

$= (n+1) - 1 = n$

<u>Beh.</u>: $\phi(U) \subseteq U$ $\left(\Rightarrow \phi|_U \in \mathrm{End}_{\mathbb{R}}(U),\ \text{Ind.-V. anwendbar}\right)$

Sei $u \in U$. z.zg.: $\phi(u) \in U \Rightarrow b(v_1, \phi(u)) = b(\phi(u), u)$

$= b(\lambda v_1, u) = \lambda\, b(v_1, u) \underset{u \in U}{=} \lambda\, 0 = 0$ $(\Rightarrow$ Beh$)$

Ind. V. $\Rightarrow \exists$ ON-Basis $(v_2, \dots, v_{n+1})$ von U aus Eigenvektoren von ϕ

$\Rightarrow (v_1, v_2, \dots, v_{n+1})$ ist ON-Basis aus Eigenv. von V

Sei nun $A \in M_{n,\mathbb{R}}$ symm. $\Rightarrow \phi_A: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ ist selbst-adj. Endomorphismus $\overset{\text{s.o.}}{\Longrightarrow} \exists$ ON-Basis $\mathcal{B}$ aus Eigenvektoren

Trage die Vektoren aus $\mathcal{B}$ als Spalten in eine Matrix T ein $\Rightarrow T = J^{\mathcal{B}}_{\mathcal{E}}$. $\mathcal{B}$ ON-Basis $\Rightarrow T$ orthogonal

$\mathcal{B}$ besteht aus Eigenvektoren $\Rightarrow D = M_{\mathcal{B}}(\phi_A)$ ist Diagonalmatrix. Transformationsformel für Bilinearf.

$$\Rightarrow D = M_{\mathcal{B}}(\phi_A) = {}^t J^{\mathcal{B}}_{\mathcal{E}} M_{\mathcal{E}}(\phi_A) J^{\mathcal{B}}_{\mathcal{E}} = {}^t TAT \quad \square$$

Eigenschaften komplexer Matrizen

Definition (16.20)

Eine Matrix $A \in \mathscr{M}_{n,\mathbb{C}}$ heißt unitär, wenn ${}^{\mathrm{t}}\bar{A}A = E^{(n)}$ und hermitesch, wenn ${}^{\mathrm{t}}\bar{A} = A$ gilt. Die unitären Matrizen bilden eine Gruppe, die sog. unitäre Gruppe $\mathrm{U}(n)$.

§ 1. Normen und Metriken

Erinnerung:

Definition (16.10)

Eine Norm auf einem $\mathbb{R}$-Vektorraum V ist eine Abbildung $\|\cdot\| : V \to \mathbb{R}_+$ mit den folgenden Eigenschaften.

(i) Für jedes $v \in V$ gilt $\|v\| = 0$ genau dann, wenn $v = 0_V$ ist.

(ii) Es gilt $\|\lambda v\| = |\lambda|\|v\|$ für alle $\lambda \in \mathbb{R}$ und $v \in V$.

(iii) Für alle $v, w \in V$ gilt $\|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|$.

Definition der p-Normen

Satz (1.1)

Auf dem $\mathbb{R}$-Vektorraum $V = \mathbb{R}^n$ ist für jedes $p \in \mathbb{R}$, $p \geq 1$ durch

$$\|x\|_p \quad = \quad \sqrt[p]{\sum_{i=1}^n |x_i|^p} \quad , \quad x = (x_1, ..., x_n) \in V$$

eine Norm definiert, die sogenannte p-Norm. Eine weitere Norm erhält man durch

$$\|x\|_\infty \quad = \quad \max\{|x_1|, ..., |x_n|\} \quad , \quad \text{die Supremumsnorm.}$$

zeige: $\|v\|_1 = \sum_{k=1}^{n} |v_k|$, $\|v\|_\infty = \max\{|v_1|, \dots, |v_n|\}$

sind Normen auf $V = \mathbb{R}^n$

zu überprüfen für $p \in \{1, \infty\}$:

(i) $\|v\|_p = 0 \Leftrightarrow v = 0_{\mathbb{R}^n}$ $\forall v \in \mathbb{R}^n$ (ii) $\|\lambda v\|_p = |\lambda| \|v\|_p$ $\forall \lambda \in \mathbb{R}, v \in \mathbb{R}^n$

(iii) $\|v + w\|_p \leq \|v\|_p + \|w\|_p$

zu (i) $p = 1$ „$\Rightarrow$" $\|v\|_1 = 0 \Rightarrow \sum_{k=1}^{n} |v_k| = 0 \Rightarrow |v_k| = 0$ für $1 \leq k \leq n \Rightarrow v_k = 0 \; \forall k \Rightarrow v = 0_{\mathbb{R}^n}$ „$\Leftarrow$" $\|0_{\mathbb{R}^n}\| = \sum_{k=1}^{n} |0| = 0$

$p = \infty$ „$\Rightarrow$" $\|v\|_\infty = 0 \Rightarrow \max\{|v_k| \; 1 \leq k \leq n\} = 0$ $\Rightarrow |v_k| = 0, \; 1 \leq k \leq n \Rightarrow v = 0_{\mathbb{R}^n}$ „$\Leftarrow$" $\|v\|_\infty =$

$\max\{|0| \mid 1\le k\le n\} = 0$

zu (ii) $p=1$ $\|\lambda v\|_1 = \sum_{k=1}^n |\lambda v_k| = |\lambda| \sum_{k=1}^n |v_k| = |\lambda|\, \|v\|_1$

$p=\infty$ $\|\lambda v\|_\infty = \max\{|\lambda v_k| \mid 1\le k\le n\} = |\lambda| \max\{|v_k| \mid$
$1\le k\le n\} = |\lambda|\, \|v\|_\infty$

zu (iii) $\|v+w\|_1 = \sum_{k=1}^n |v_k+w_k| \le \sum_{k=1}^n (|v_k|+|w_k|) =$
$\sum_{k=1}^n |v_k| + \sum_{k=1}^n |w_k| = \|v\|_1 + \|w\|_1$

Für $1\le k\le n$ gilt $|v_k+w_k| \le |v_k|+|w_k| \le \max\{|v_l| \mid 1\le l\le n\}$
$+ \max\{|w_l| \mid 1\le l\le n\} = \|v\|_\infty + \|w\|_\infty$

$\Rightarrow \max\{|v_k+w_k| \mid 1\le k\le n\} \le \|v\|_\infty + \|w\|_\infty$

$\Rightarrow \|v+w\|_\infty \le \|v\|_\infty + \|w\|_\infty$ $\square$

Beispiel: Die Normen $\|\ \|_1$ und $\|\cdot\|_\infty$ auf $\mathbb{R}^n$
sind äquivale[nt]

Die Höldersche Ungleichung

Lemma (1.2)

Seien $p, q \in \mathbb{R}$, $p, q > 1$ mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ und $x, y \in \mathbb{R}_+$. Dann gilt

$$x^{1/p} y^{1/q} \quad \leq \quad \frac{x}{p} + \frac{y}{q}.$$

Die folgende Höldersche Ungleichung wird benötigt, um für die p-Normen die Dreiecksungleichung zu beweisen.

Proposition (1.3)

Seien $x, y \in \mathbb{R}^n$, $x = (x_1, ..., x_n)$ und $y = (y_1, ..., y_n)$, und seien $p, q \in \mathbb{R}$ mit $p, q > 1$ und $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ vorgegeben. Dann gilt

$$\sum_{i=1}^{n} |x_i| \cdot |y_i| \quad \leq \quad \|x\|_p \|y\|_q$$

Bedeutung der ∞-Norm

Proposition (1.4)

Für alle $x \in \mathbb{R}^n$ gilt $\lim_{p \to \infty} \|x\|_p = \|x\|_\infty$.

Äquivalenz von Normen

Definition (1.5)

Zwei Normen $\|\cdot\|$ und $\|\cdot\|'$ auf einem $\mathbb{R}$-Vektorraum V werden als äquivalent bezeichnet, wenn reelle Konstanten $\gamma_1, \gamma_2 > 0$ mit der Eigenschaft

$$\gamma_1\|x\| \quad \leq \quad \|x\|' \quad \leq \quad \gamma_2\|x\| \qquad \text{für alle } x \in V \text{ existieren.}$$

Offenbar gleichwertig mit dieser Bedingung ist die Existenz von reellen Konstanten $\delta_1, \delta_2 > 0$ mit $\|x\| \leq \delta_1\|x\|'$ und $\|x\|' \leq \delta_2\|x\|$ für alle $x \in V$.

Beispiel: Die Normen $\| \cdot \|_1$ und $\| \cdot \|_\infty$ auf $\mathbb{R}^n$ sind äquivalent

Sei $v \in \mathbb{R}^n$. $\|v\|_\infty = \max\{|v_1|, \dots, |v_n|\} \leq \sum_{k=1}^{n} |v_k| = \|v\|_1$

$$\Longrightarrow \|v\|_\infty \leq 1 \cdot \|v\|_1$$

$$\|v\|_1 = \sum_{k=1}^{n} |v_k| \leq \sum_{k=1}^{n} \max\{|v_l| \mid 1 \leq l \leq n\} = \sum_{k=1}^{\infty} \|v\|_\infty$$

$$= n \|v\|_\infty \quad \Longrightarrow \quad \|v\|_1 \leq n \cdot \|v\|_\infty$$

Geometrische Interpretation der Normäquivalenz, Teil I

Für alle $r \in \mathbb{R}^+$ und $a \in V$ bezeichnen wir mit

$$B_{\|\cdot\|,r}(a) \quad = \quad \{x \in V \mid \|x - a\| < r\}$$

bzw.

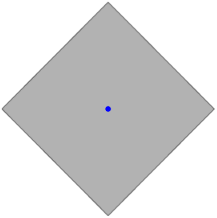
$$\bar{B}_{\|\cdot\|,r}(a) \quad = \quad \{x \in V \mid \|x - a\| \leq r\}$$

den offenen bzw. abgeschlossenen Ball vom Radius r um den Punkt a bezüglich der Norm $\|\cdot\|$.

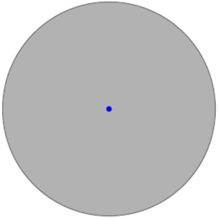
Geometrische Interpretation der Normäquivalenz, Teil II

Proposition (1.6)

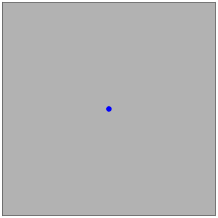
Sei $\delta \in \mathbb{R}^+$. Dann ist die Ungleichung $\|x\|' \leq \delta\|x\|$ für alle $x \in V$ gleichbedeutend mit $B_{\|\cdot\|,r}(a) \subseteq B_{\|\cdot\|',\delta r}(a)$ für $a \in V$ und $r \in \mathbb{R}^+$. Eine entsprechende Aussage gilt auch für die abgeschlossenen Bälle.



$\{x \in \mathbb{R}^2 \mid \|x\|_1 \leq 1\}$



$\{x \in \mathbb{R}^2 \mid \|x\|_2 \leq 1\}$



$\{x \in \mathbb{R}^2 \mid \|x\|_\infty \leq 1\}$