Berechnung des Abstands zweier affiner Unterräume

Proposition (15.17)

Seien $A, A' \subseteq \mathbb{R}^n$ zwei affine Unterräume und $v, v' \in \mathbb{R}^n$ zwei Vektoren mit der Eigenschaft, dass $A = v + \mathscr{L}(A)$, $A' = v' + \mathscr{L}(A')$ und außerdem $(v' - v) \perp (\mathscr{L}(A) + \mathscr{L}(A'))$ gilt. Dann ist $d(A, A') = \|v' - v\|$.

Satz (15.18)

Seien $A, A' \subseteq \mathbb{R}^n$ zwei affine Unterräume und $v \in A$, $v' \in A'$ beliebige Punkte. Sei $U = \mathscr{L}(A) + \mathscr{L}(A')$ und $w = \pi_U(v' - v)$. Dann gilt $d(A, A') = \|v' - v - w\|$.

Positive und negative Orientierung von Basen

Definition (15.19)

Wie immer sei $\mathscr{E}$ die Einheitsbasis auf dem $\mathbb{R}^n$. Wir bezeichnen eine geordnete Basis $\mathscr{B}$ des $\mathbb{R}^n$ als positiv bzw. negativ orientiert, wenn die Transformationsmatrix $\mathscr{T}_{\mathscr{E}}^{\mathscr{B}}$ eine positive bzw. negative Determinante besitzt.

Definition der Drehmatrizen

Definition (15.20)

Für jedes $\alpha \in \mathbb{R}$ bezeichnen wir

$$D_\alpha \quad = \quad \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix}$$

als die Drehmatrix zum Winkel α.

Zusammenhang zwischen Drehung und Winkel

Proposition (15.21)

Seien $v, w \in \mathbb{R}^2$ mit $\|v\| = \|w\| = 1$, wobei im Falle der linearen Unabhängigkeit von $\{v, w\}$ die geordnete Basis $\mathscr{B} = (v, w)$ des $\mathbb{R}^2$ positiv orientiert sei. Dann gilt $D_\alpha v = w$ mit $\alpha = \angle(v, w)$.

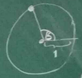
Bew. von Prop. (15.21)

1. Fall: $\{v, w\}$ linear abhängig $\Rightarrow w = v,\ w = -v$

Fall $w = v \Rightarrow \alpha = 0 \Rightarrow D_\alpha = \begin{pmatrix} \cos(0) & -\sin(0) \\ \sin(0) & \cos(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow D_\alpha v = v = w$

Fall $w = -v \Rightarrow \alpha = \pi \Rightarrow D_\alpha = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$



$\Rightarrow D_\alpha v = -v = w$

2. Fall: $\{v, w\}$ linear unabh., $B = (v, w)$ positiv orientiert

$\|v\| = \|w\| = 1 \Rightarrow \exists\, \beta, \gamma \in [0, 2\pi[$ mit $v = \begin{pmatrix} \cos(\beta) \\ \sin(\beta) \end{pmatrix}$, $w = \begin{pmatrix} \cos(\gamma) \\ \sin(\gamma) \end{pmatrix}$

$\cos(\alpha) = \cos \measuredangle(v, w) = \langle v, w \rangle = \cos(\beta)\cos(\gamma) + \sin(\beta)\sin(\gamma)$

$= \cos(-\beta)\cos(\gamma) - \sin(-\beta)\sin(\gamma) = \cos(-\beta + \gamma) = \cos(\gamma - \beta)$

$B = (v, w)$ positiv orientiert $\Rightarrow$

$$\sin(\gamma-\beta) = \sin(\gamma+(-\beta)) = \sin(\gamma)\cos(-\beta) + \cos(\gamma)\sin(-\beta)$$

$$= \sin(\gamma)\cos(\beta) - \sin(\beta)\cos(\gamma) = \det \begin{array}{cc} v & w \\ \multicolumn{2}{c}{\underbrace{\begin{pmatrix} \cos(\beta) & \cos(\gamma) \\ \sin(\beta) & \sin(\gamma) \end{pmatrix}}_{J^{\beta}_{\varepsilon}}} \end{array} > 0$$

positive Orientierung

Aus $\sin(\gamma-\beta) > 0$ folgt $\gamma-\beta \in \,]0,\pi[$

$\alpha, \gamma-\beta \in \,]0,\pi[$, gleiches Kosinus $\Rightarrow \alpha = \gamma-\beta$

$$\Rightarrow D_\alpha v = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(\beta) \\ \sin(\beta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\alpha)\cos(\beta) - \sin(\alpha)\sin(\beta) \\ \sin(\alpha)\cos(\beta) + \cos(\alpha)\sin(\beta) \end{pmatrix}$$

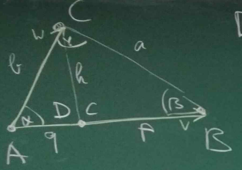
$$= \begin{pmatrix} \cos(\alpha+\beta) \\ \sin(\alpha+\beta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\gamma) \\ \sin(\gamma) \end{pmatrix} = w$$

Satz (15.22)

Wir betrachten ein Dreieck mit den Eckpunkten $A, B, C \in \mathbb{R}^2$. Die Punkte seien so angeordnet, dass die Basis des $\mathbb{R}^2$ bestehend aus $v = \overrightarrow{AB}$ und $w = \overrightarrow{AC}$ positiv orientiert ist. Die Seitenlängen des Dreiecks bezeichnen wir wie in der Zeichnung zu Beginn des Kapitels mit $a = \|\overrightarrow{BC}\| = \|w - v\|$, $b = \|\overrightarrow{AC}\| = \|w\|$ und $c = \|\overrightarrow{AB}\| = v$. Außerdem sei D der Höhenfußpunkt auf der Seite AB und $h = \|\overrightarrow{DC}\|$ die Höhe. Der Höhenfußpunkt unterteilt die Seite AB in zwei Abschnitte der Längen $p = \|\overrightarrow{DB}\|$ und $q = \|\overrightarrow{AD}\|$.

(i) Die Winkelsumme im Dreieck beträgt $\pi = 180°$.

(ii) Besitzt das Dreieck in C einen rechten Winkel, dann gelten der Höhensatz $h^2 = pq$ und die beiden Kathetensätze $a^2 = pc$ und $b^2 = qc$.



Beweis von Satz (15.22):

zu (i) Winkelsumme 180°

$v = \overrightarrow{AB}$, $w = \overrightarrow{AC}$, $w - v = \overrightarrow{BC}$

$\alpha = \sphericalangle(v, w)$ $\quad \beta = \sphericalangle(w - v, -v)$

$\gamma = \sphericalangle(-w, v - w)$ $\quad (v, w)$ positiv orientiert $\Rightarrow$

$\det(v, w) = \det\begin{pmatrix} v_1 & w_1 \\ v_2 & w_2 \end{pmatrix} = v_1 w_2 - w_1 v_2 > 0$

Auch die Paare $(w - v, -v)$ und $(-w, v - w)$ sind positiv orientiert

denn $\det(w - v, -v_1) = \det\begin{pmatrix} w_1 - v_1 & -v_1 \\ w_2 - v_2 & -v_2 \end{pmatrix} = (w_1 - v_1)(-v_2) - (w_2 - v_2)(-v_1)$

$= -w_1 v_2 + v_1 v_2 + v_1 w_2 - v_1 v_2 = v_1 w_2 - w_1 v_2 > 0$

ebenso $\det(-w, v - w) > 0$ Seien u_0, v_0, w_0 die Normierungen von $w - v, v, w$ Prop (15.21) $\Rightarrow$ $D_\alpha v_0 = w_0$, $D_\gamma(-w_0) = -u_0$, $D_\beta u_0 = -v_0$ allgemein gilt: $D_\alpha D_\beta = D_{\alpha+\beta}$

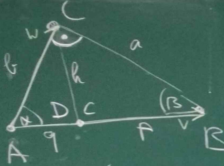
(nachzurechnen mit dem Additionstheorem)

$D_{\alpha+\beta+\gamma} v_0 = D_\beta D_\gamma D_\alpha v_0 = D_\beta D_\gamma w_0 = D_\beta u_0 = -v_0$

Da der Winkel zwischen v_0 und $-v_0$ gleich π ist, folgt

$\alpha+\beta+\gamma = \pi = 180°$, wieder nach Prop. (15.21)

$\langle v, v \rangle$ □



zu (ii) Höhensatz und Kathetensätze

$v = \overrightarrow{AB}$, $w = \overrightarrow{AC}$

rechter Winkel im Punkt C

$\Rightarrow \overrightarrow{CA} \perp \overrightarrow{CB} \Rightarrow w \perp (w-v)$

$\Rightarrow \langle w,w\rangle = \langle v+w-v, w\rangle = \langle v,w\rangle + \underbrace{\langle w-v, w\rangle}_{=0} = \langle v,w\rangle$

Der Vektor $\overrightarrow{AD}$ (wobei D = Höhenfußpunkt) entsteht durch Orthogonalproj. von w auf lin(v). $\Rightarrow \overrightarrow{AD} = \lambda v$ mit $\lambda = \frac{\langle v,w\rangle}{\|v\|^2}$

v, w bilden spitzen Winkel $\Rightarrow \lambda > 0$

Längen der Teilabschnitte der Seite AB sind $\|\overrightarrow{AD}\| = \lambda\|v\| = q$, $p = (1-\lambda)\|v\|$

erster Kathetensatz: $qc = \lambda \|v\|^2 = \frac{\langle v,w\rangle}{\|v\|^2}\|v\|^2 = \langle v,w\rangle \overset{=\circ}{=} \langle w,w\rangle = \|w\|^2 = b^2$

zweiter Kathetensatz: $pc = (1-\lambda)\|v\|^2 = \left(1-\frac{\langle v,w\rangle}{\langle v,v\rangle}\right)\langle v,v\rangle$

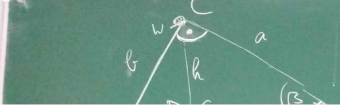
$$\langle v,v\rangle - \langle v,w\rangle = \langle -v, w-v\rangle = 0 + \langle -v, w-v\rangle =$$
$$\langle w, w-v\rangle + \langle -v, w-v\rangle = \langle w-v, w-v\rangle = \|w-v\|^2 = a^2$$

Höhensatz: $h = \|\overrightarrow{DC}\| = \|w-\lambda v\| \Rightarrow$

$$h^2 = \langle w-\lambda v, w-\lambda v\rangle = \langle w,w\rangle - \lambda\langle v,w\rangle - \lambda\langle w,v\rangle + \lambda^2\langle v,v\rangle$$
$$= \langle w,w\rangle - 2\lambda\langle v,w\rangle + \lambda^2\langle v,v\rangle = \langle w,w\rangle - 2\frac{\langle v,w\rangle^2}{\langle v,v\rangle} + \frac{\langle v,w\rangle^2}{\langle v,v\rangle}$$
$$= \langle w,w\rangle - \frac{\langle v,w\rangle^2}{\langle v,v\rangle} = \langle v,w\rangle - \frac{\langle v,w\rangle^2}{\langle v,v\rangle}$$

$$pq = \lambda(1-\lambda)\|v\|^2 = \frac{\langle v,w\rangle}{\cancel{\langle v,v\rangle}}\left(1-\frac{\langle v,w\rangle}{\langle v,v\rangle}\right)\cancel{\langle v,v\rangle}$$
$$= \langle v,w\rangle - \frac{\langle v,w\rangle^2}{\langle v,v\rangle}$$

$\square$



zu (ii) Höhensatz und Kathetensätze

$v = \overrightarrow{AB}$, $w = \overrightarrow{AC}$

rechter Winkel im Punkt C

Definition der orthogonalen Matrizen

Definition (15.23)

(i) Eine Matrix $A \in \mathscr{M}_{n,\mathbb{R}}$ wird orthogonal genannt, wenn ${}^{\mathrm{t}}AA = E^{(n)}$ gilt.

(ii) Die orthogonalen Matrizen bilden eine Untergruppe von $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$, die sogenannte orthogonale Gruppe $\mathrm{O}(n)$.

(iii) Die Untergruppe $\mathrm{SO}(n) = \{A \in \mathrm{O}(n) \mid \det(A) = 1\}$ wird spezielle orthogonale Gruppe genannt.

Beispiel: Drehmatrizen sind Elemente der $\mathrm{SO}(2)$.

$$\sum_{k=1} v_k \left\langle Ae_k, \sum_{l=1} w_l A e_l \right\rangle = \sum_{k=1}^{n} \sum_{l=1}^{n} v_k w_l \langle Ae_k, Ae_l \rangle \overset{(*)}{=}$$

zu Def. (15.23) (ii).

Beh. Aus $A, B \in O(n)$ folgt $AB \in O(n)$, $A^{-1} \in O(n)$

$A, B \in O(n) \Rightarrow {}^tA A = {}^tB B = E_n$

$\Rightarrow {}^t(AB)(AB) = {}^tB\, {}^tA A B = {}^tB E_n B = {}^tB B$

$= E_n \Rightarrow AB \in O(n)$

${}^tA A = E_n \Rightarrow {}^tA = A^{-1} \Rightarrow {}^t(A^{-1}) A^{-1} =$

${}^t(A^{-1}) = ({}^tA)^{-1}$

$({}^tA)^{-1} A^{-1} = (A\, {}^tA)^{-1} = E_n^{-1} = E_n$

${}^tA = A^{-1}$

$\Rightarrow A\, {}^tA = E_n$

Charakterisierung durch das euklidische Skalarprodukt

Proposition (15.24)

Eine Matrix $A \in \mathscr{M}_{n,\mathbb{R}}$ ist genau dann orthogonal, wenn $\langle Av, Aw \rangle = \langle v, w \rangle$ für alle $v, w \in \mathbb{R}^n$ gilt.

Bew. von Prop (15.24)

Sei $A \in M_{n,\mathbb{R}}$ mit Spaltenvektoren $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}^n$

Es gilt die Äquivalenz: A orthogonal $\Leftrightarrow {}^tA\,A = E^{(n)}$

$\Leftrightarrow \langle Ae_k, Ae_l \rangle = \langle a_k, a_l \rangle \overset{(*)}{=} \delta_{kl}$ für $1 \leq k, l \leq n$

(Die Spalten von A bilden also eine ON-Basis g.d.w. A orthogonal ist.) Beweis der Äquivalenz: „$\Longrightarrow$"

A orthogonal $\Rightarrow$ $(*)$ erfüllt | Seien nun $v, w \in \mathbb{R}^n$

bel. vorgeg. $v = \sum_{k=1}^n v_k e_k$, $w = \sum_{l=1}^n w_l e_l \Rightarrow$

$$\langle Av, Aw \rangle = \left\langle \sum_{k=1}^n v_k A e_k, \sum_{l=1}^n w_l A e_l \right\rangle =$$

$$\sum_{k=1}^n v_k \left\langle Ae_k, \sum_{l=1}^n w_l A e_l \right\rangle = \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n v_k w_l \langle Ae_k, Ae_l \rangle \overset{(*)}{=}$$

$$\sum_{k=1} v_k \left\langle Ae_k, \sum_{l=1} w_l Ae_l \right\rangle = \sum_{k=1}\sum_{l=1}^{n} v_k w_l \langle Ae_k, Ae_l\rangle \overset{(*)}{=}$$

$$\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n} v_k w_l \delta_{kl} = \sum_{k=1}^{n} v_k w_k = \langle v, w\rangle$$

„$\Leftarrow$" Vor.: $\langle Av, Aw\rangle = \langle v, w\rangle \;\forall v, w \in \mathbb{R}^n$

$\Rightarrow \langle Ae_k, Ae_l\rangle = \langle e_k, e_l\rangle = \delta_{kl}$ für $1 \le k, l \le n$

$\overset{\text{s.o.}}{\Longrightarrow}$ A orthogonal. $\square$