Existenz und Eindeutigkeit der Jordanschen Normalform

Folgerung (14.26)

Sei K ein Körper.

(i) Ist V ein endlich-dimensionaler K-Vektorraum und ϕ ein Endomorphismus von V mit der Eigenschaft, dass $\chi_\phi \in K[x]$ über K in Linearfaktoren zerfällt, dann existiert eine geordnete Basis $\mathscr{B}$ von V mit der Eigenschaft, dass $\mathscr{M}_{\mathscr{B}}(\phi)$ in Jordanscher Normalform vorliegt.

(ii) Sei $n \in \mathbb{N}$. Jede Matrix $A \in \mathscr{M}_{n,K}$ mit der Eigenschaft, dass das charakteristische Polynom $\chi_A \in K[x]$ über K in Linearfaktoren zerfällt, ist ähnlich zu einer Matrix in Jordanscher Normalform.

(iii) Zwei Matrizen $J_1, J_2 \in \mathscr{M}_{n,K}$ in Jordanscher Normalform sind genau dann ähnlich zueinander, wenn J_2 bis auf Reihenfolge dieselben Jordanblöcke wie J_1 besitzt.

Bem. Matrizen mit denselben Blöcken auf der Hauptdiagonalen sind ähnlich

Bsp. $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ sind ähnlich

$$P_{(12)} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} {}^t P_{(12)} = P_{(12)} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} P_{(12)}^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ebenso sieht man, dass z. B.

$$\begin{pmatrix} \boxed{J_1} & \\ & \boxed{J_2} \end{pmatrix} \text{ und } \begin{pmatrix} \boxed{J_2} & \\ & \boxed{J_1} \end{pmatrix}$$

ähnlich sind, wobei J_1, J_2 Jordanblöcke bezeichnen

zum Beweis des Satzes von Pythagoras.

Da die drei Dreiecke ähnlich zueinander sind,

§ 15. Euklidisches Skalarprodukt und Euklidische Geometrie

Sinnvolle Eigenschaften einer „Längenfunktion“ $\|\cdot\|$ auf dem $\mathbb{R}^n$

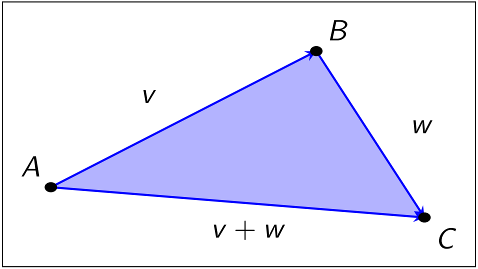
(L_0) Die Einheitsvektoren besitzen die Länge 1, also
$\|e_1\| = \|e_2\| = 1$,
wobei $e_1 = (1,0)$ und $e_2 = (0,1)$ ist.

(L_1) Für alle $v \in \mathbb{R}^2$ gilt $\|v\| = 0$ genau dann, wenn $v = 0_{\mathbb{R}^2}$ ist.

(L_2) Skalieren wir einen Vektor $v \in \mathbb{R}^2$ mit einer reellen Zahl λ, dann ändert sich die Länge um den Faktor $|\lambda|$. Es sollte also $\|\lambda v\| = |\lambda|\|v\|$ für alle $\lambda \in \mathbb{R}$ und $v \in \mathbb{R}^2$ gelten.

(L_3) Es gilt die sog. Dreiecksungleichung $\|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|$ für alle $v, w \in \mathbb{R}^2$.

Die Dreiecksungleichung



Sinnvolle Eigenschaften einer Orthogonalitätsrelation $\perp$

(O_0) Die Einheitsvektoren stehen senkrecht aufeinander, es gilt also $e_1 \perp e_2$.

(O_1) Für kein $v \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0_{\mathbb{R}^2}\}$ gilt $v \perp v$.

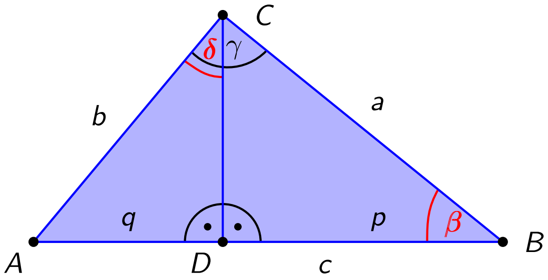
(O_2) Die Relation $\perp$ ist symmetrisch, d.h. für alle Vektoren $0_{\mathbb{R}^2} \neq v, w \in \mathbb{R}^2$ gilt die Äquivalenz $v \perp w \Leftrightarrow w \perp v$.

(O_3) Die Relation $\perp$ besitzt folgende Linearitätseigenschaft: Seien $0_{\mathbb{R}^2} \neq u, v, w \in \mathbb{R}^2$ ungleich Null mit $u \perp v$ und $u \perp w$. Dann gilt $u \perp (v + w)$, sofern $v + w$ ungleich dem Nullvektor ist, und außerdem $u \perp (\lambda v)$ für alle $\lambda \in \mathbb{R}$ mit $\lambda \neq 0$.

Satz des Pythagoras

Satz (15.1)

Seien $A, B, C \in \mathbb{R}^2$ die Eckpunkte eines Dreiecks und $a = \|BC\|$, $b = \|CA\|$, $c = \|AB\|$ seine Seitenlängen. Genau dann gilt $a^2 + b^2 = c^2$, wenn das Dreieck im Punkt C einen rechten Winkel besitzt, wenn also $\overrightarrow{CA} \perp \overrightarrow{CB}$ erfüllt.



und J_2 ähnlich sind, liefern

J_1, J_2 Jordanblöcke

zum Beweis des Satzes von Pythagoras.

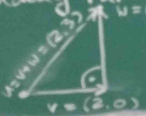
Da die drei Dreiecke ähnlich zueinander sind, liefern die Verhältnisse Gegenkathete zu Hypothenuse $\frac{q}{b} = \frac{b}{c}$, ebenso Ankathete zu Hypothenuse

$\frac{p}{a} = \frac{a}{c} \Rightarrow a^2 = pc,\ b^2 = qc \Rightarrow a^2 + b^2 = pc + qc$

$= (p+q)c = c^2$

anschauliche Begründung für die Längenformel

$\|v\| = \sqrt{\langle v, v\rangle}$



$\|u\|^2 = \|v\|^2 + \|w\|^2 = 2^2 + 3^2$

$= 13 \Rightarrow \|u\| = \sqrt{13} = \sqrt{2^2+3^2}$

$\langle u, u\rangle = \langle \binom{2}{3}, \binom{2}{3} \rangle = 2^2 + 3^2$

Eindeutige Festlegung der von $\|\cdot\|$ und $\perp$ auf dem $\mathbb{R}^n$

Setzen wir voraus, dass unsere Längenfunktion $v \mapsto \|v\|$ die Bedingungen (L_0) bis (L_3) und unsere Relation $\perp$ die Bedingungen (O_0) bis (O_3) erfüllt, und dass außerdem der Satz des Pythagoras gültig ist, dann gibt es nur eine einzige Möglichkeit, diese zu definieren!

Euklidisches Standard-Skalarprodukt

Definition (15.3)

Das euklidische Standard-Skalarprodukt zweier Vektoren $v, w \in \mathbb{R}^n$, $v = (v_1, ..., v_n)$ und $w = (w_1, ..., w_n)$ ist gegeben durch

$$\langle v, w \rangle \quad = \quad \sum_{k=1}^{n} v_k w_k .$$

Definition von $\|\cdot\|$ und $\perp$

Definition (15.2)

Die Länge eines Vektors $v \in \mathbb{R}^n$ ist definiert durch

$$\|v\| = \sqrt{\langle v, v \rangle}.$$

Zwei Vektoren $v, w \in \mathbb{R}^n$ ungleich Null sind orthogonal zueinander (Notation $v \perp w$), wenn $\langle v, w \rangle = 0$ gilt.

Eigenschaften des Euklidischen Standard-Skalarprodukts

Proposition (15.4)

Für alle $v, v', w, w' \in \mathbb{R}^n$ und $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt

(i) $\langle v + v', w\rangle = \langle v, w\rangle + \langle v', w\rangle$

(ii) $\langle v, w + w'\rangle = \langle v, w\rangle + \langle v, w'\rangle$

(iii) $\langle \lambda v, w\rangle = \langle v, \lambda w\rangle = \lambda\langle v, w\rangle$

(iv) $\langle v, w\rangle = \langle w, v\rangle$

(v) $\langle v, v\rangle > 0$ falls $v \neq 0_{\mathbb{R}^n}$

$$P_{(12)} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} {}^t P_{(12)} = P_{(12)} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} P_{(12)}^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Beweis von Prop. (15.4)

zu (i) geg. $v, v', w \in \mathbb{R}^n$, z. zg.: $\langle v+v', w \rangle = \langle v, w \rangle + \langle v', w \rangle$

$$\langle v+v', w \rangle = \sum_{i=1}^{n} (v_i + v_i') \cdot w_i = \sum_{i=1}^{n} v_i \cdot w_i + \sum_{i=1}^{n} v_i' w_i$$

$$= \langle v, w \rangle + \langle v', w \rangle$$

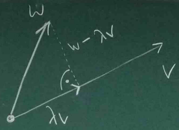
Rest siehe Skript. $\square$

Orthogonalprojektion auf einen Vektor

Proposition (15.5)

Seien $v, w \in \mathbb{R}^n$ mit $v \neq 0_{\mathbb{R}^n}$ vorgegeben und $\lambda = \frac{\langle v,w \rangle}{\|v\|^2}$. Dann gilt $\langle v, w - \lambda v \rangle = 0$. Wir bezeichnen den Vektor λv als die Orthogonalprojektion von w auf den Untervektorraum $\mathrm{lin}(v)$ von $\mathbb{R}^n$.

Orthogonalprojektion



Beweis von Prop (15.5):

z.zg.: $\langle v, w-\lambda v \rangle = 0$ für $\lambda = \dfrac{\langle v,w\rangle}{\|v\|^2}$

$$\langle v, w-\lambda v\rangle = \langle v,w\rangle - \langle v,\lambda v\rangle = \langle v,w\rangle - \lambda\langle v,v\rangle$$

$$= \langle v,w\rangle - \frac{\langle v,w\rangle}{\|v\|^2}\langle v,v\rangle = \langle v,w\rangle - \frac{\langle v,w\rangle}{\cancel{\langle v,v\rangle}}\cancel{\langle v,v\rangle} = 0 \quad \square$$

Beweis von Satz (15.6): geg. $v, w \in \mathbb{R}^n$

z.zg.: $|\langle v,w\rangle| \le \|v\|\,\|w\|$ mit „=" gdw. v, w linear abhängig sind

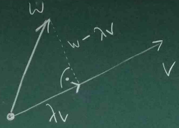
$$\Rightarrow \langle v,w\rangle^2 \le \|v\|^2\|w\|^2 \Rightarrow |\langle v,w\rangle| \le \|v\|\,\|w\|$$

Die Cauchy-Schwarzsche Ungleichung

Satz (15.6)

Für alle $v, w \in \mathbb{R}^n$ gilt $|\langle v, w \rangle| \leq \|v\| \|w\|$ mit Gleichheit genau dann, wenn v und w linear abhängig sind.

Orthogonalprojektion



Beweis von Prop (15.5):

z.zg.: $\langle v, w-\lambda v \rangle = 0$ für $\lambda = \frac{\langle v,w \rangle}{\|v\|^2}$

$$\langle v, w-\lambda v \rangle = \langle v,w \rangle - \langle v,\lambda v \rangle = \langle v,w \rangle - \lambda \langle v,v \rangle$$

$$= \langle v,w \rangle - \frac{\langle v,w \rangle}{\|v\|^2} \langle v,v \rangle = \langle v,w \rangle - \frac{\langle v,w \rangle}{\cancel{\langle v,v \rangle}} \cancel{\langle v,v \rangle} = 0 \quad \square$$

Beweis von Satz (15.6): geg. $v,w \in \mathbb{R}^n$

z.zg.: $|\langle v,w \rangle| \leq \|v\| \, \|w\|$ mit „=" gdw. v,w linear abhängig sind

$$\Rightarrow \langle v,w \rangle^2 \leq \|v\|^2 \|w\|^2 \Rightarrow |\langle v,w \rangle| \leq \|v\| \, \|w\|$$

1 Fall. $v = 0_{\mathbb{R}^n}$ oder $w = 0_{\mathbb{R}^n}$. Dann sind beide Seiten der Ungl. gleich 0. Da v, w linear abh. sind, gilt auch die Äquivalenz.

2. Fall: $v, w \neq 0_{\mathbb{R}^n}$. Sei $\lambda = \frac{\langle v, w\rangle}{\|v\|^2}$.

$$0 \leq \langle w-\lambda v, w-\lambda v\rangle = \langle w, w-\lambda v\rangle - \lambda\langle v, w-\lambda v\rangle$$

$$= \langle w, w\rangle - \lambda\langle w, v\rangle - \lambda\langle v, w\rangle + \lambda^2\langle v, v\rangle$$

$$= \langle w, w\rangle - 2\lambda\langle v, w\rangle + \lambda^2\langle v, v\rangle$$ Setze λ ein. $\Rightarrow$

$$\langle w, w\rangle - 2\frac{\langle v, w\rangle}{\|v\|^2}\langle v, w\rangle + \frac{\langle v, w\rangle^2}{\|v\|^4}\langle v, v\rangle \geq 0 \Rightarrow$$

$$\langle w, w\rangle - 2\frac{\langle v, w\rangle^2}{\|v\|^2} + \frac{\langle v, w\rangle^2}{\|v\|^2} \geq 0 \Rightarrow \frac{\langle v, w\rangle^2}{\|v\|^2} \leq \|w\|^2$$

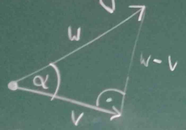
$$\Rightarrow \langle v, w\rangle^2 \leq \|v\|^2\|w\|^2 \Rightarrow |\langle v, w\rangle| \leq \|v\|\,\|w\|$$

Beweis der Äquivalenz: Ang. die C-S Ungl. gilt mit Gleichheit. Rechnung zeigt: Gleichheit nur möglich falls $\langle w-\lambda v, w-\lambda v\rangle = 0 \Rightarrow w-\lambda v = 0_{\mathbb{R}^n} \Rightarrow$ $w=\lambda v \Rightarrow \{v,w\}$ linear abhängig

umgekehrt: v,w linear abh., $v,w \neq 0_{\mathbb{R}^n} \Rightarrow \exists \mu \in \mathbb{R}$: $w = \mu v \rightarrow |\langle v,w\rangle| = |\langle v,\mu v\rangle| = |\mu|\,\|v\|^2$

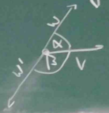
andererseits auch $\|v\|\cdot\|w\| = \|v\|\,\|\mu v\| = |\mu|\,\|v\|^2$ $\square$

Bedeutung der Eigenschaft $(W2)$:



$$\cos \sphericalangle(v,w) = \frac{\|v\|}{\|w\|}$$

Bedeutung von $(W3)$:



$$\alpha + \beta = \pi$$

$= \langle w,w\rangle - 2\lambda\langle v,w\rangle + \lambda^2\langle v,v\rangle$ Setze λ ein $\Rightarrow$

$\ldots \geq 0 \Rightarrow$

Sinnvolle Eigenschaften einer Winkelfunktion

Eine Abbildung, die jedem Paar (v, w) von Vektoren ungleich null eine Zahl $[0, \pi]$ (Winkel im Bogenmaß) zuordnet, sollte folgende Eigenschaften besitzen, wenn sie eine geometrisch sinnvoll definierte Winkelfunktion sein soll.

(W_0) Es gilt $\angle(v, w) = \angle(w, v)$ und $\angle(v, v) = 0$.

(W_1) Für alle $\lambda \in \mathbb{R}^+$ gilt $\angle(v, \lambda w) = \angle(v, w)$.

(W_2) Gilt $(w - v) \perp v$, dann folgt daraus $\cos \angle(v, w) = \frac{\|v\|}{\|w\|}$.

(W_3) Es gilt $\angle(v, -w) = \pi - \angle(v, w)$.

Definition des Winkels zwischen zwei Vektoren

Definition (15.7)

Seien $v, w \in \mathbb{R}^n$ mit $v, w \neq (0,0)$. Dann ist der Winkel zwischen v und w die eindeutig bestimmte Zahl $\angle(v,w) \in [0,\pi]$ mit der Eigenschaft

$$\cos \angle(v,w) \quad = \quad \frac{\langle v, w \rangle}{\|v\| \|w\|}.$$

Eindeutigkeit von $\|\cdot\|$ und $\perp$

Proposition (15.8)

Sei $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_+$, $v \mapsto \|v\|'$ eine Abbildung und $\perp'$ eine Relation auf $\mathbb{R}^n \setminus \{0_{\mathbb{R}^n}\}$, so dass die Bedingungen (L_0) bis (L_3) und (O_0) bis (O_3) sowie der Satz des Pythagoras in der soeben angegebenen, verallgemeinerten Form erfüllt sind. Dann gilt $\|v\|' = \|v\|$ für alle $v \in \mathbb{R}^n$ und $v \perp' w \Leftrightarrow v \perp w$ für alle $v, w \in \mathbb{R}^n \setminus \{0_{\mathbb{R}^n}\}$.

Bew von Prop (15.8):

geg $\| \ \|' : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_+$, Relation $\perp'$ auf $\mathbb{R}^n \setminus \{0_{\mathbb{R}^n}\}$, erfüllen (L_0) bis (L_3), (O_0) bis (O_3), Satz des Pythagoras

zzg: $\| \ \|' = \| \ \|$, $\perp' = \perp$

vollständige Ind über n.

$\underline{n=1}$ Wegen (L_0) bis (L_3) gilt $\|e_1\|' = \|1\|' = 1$

und $\|a\|' = \|a e_1\|' = |a| \, \|e_1\|' = |a| = \sqrt{a^2} = \sqrt{\langle a, a \rangle} = \|a\|$

Wegen (O_1) bis (O_3) gilt nicht $v \perp' v$ für jedes $v \in \mathbb{R}^1 \setminus \{0\}$

ebenso: $\langle v, v \rangle = v^2 > 0 \ \forall v \in \mathbb{R}^1 \setminus \{0\} \Rightarrow v \perp v$ für kein $v \in \mathbb{R}^1 \setminus \{0\}$

Sei $n \geq 1$ Ind-Schritt $n \mapsto n+1$:

Nach (O_0) bis (O_3) gilt $e_{n+1} \perp' e_k$ für $1 \leq k \leq n$.

damit auch $e_{n+1} \perp' \left(\sum_{k=1}^{n} v_k' e_k \right) \to e_{n+1} \perp v' \Rightarrow$

Sei $v \in \mathbb{R}^{n+1}$ vorgeg. Schreibe $v = (v', v_{n+1})$ mit $v' \in \mathbb{R}^n$

$= (v', 0) + (0, v_{n+1})$. Fasse $(v', 0)$ als Vektor im $\mathbb{R}^n$ auf

Ind-V $\Rightarrow \left(\|v'\|'\right)^2 = \|v'\|^2 = \langle v', v' \rangle = \sum_{k=1}^{n} (v_k')^2$

Nach (O_0) bis (O_3) gilt $e_{n+1} \perp' e_k$ für $1 \leq k \leq n$.

damit auch $e_{n+1} \perp' \left(\sum_{k=1}^{n} v_k' e_k \right) \Rightarrow e_{n+1} \perp v' \Rightarrow$

$v_{n+1} e_{n+1} \perp v'$, $v = v' + v_{n+1} e_{n+1}$. Satz des Pythagoras $\Rightarrow$

$$\left(\|v\|'\right)^2 = \left(\|v'\|'\right)^2 + \left(\|v_{n+1} e_{n+1}\|'\right)^2 = \sum_{k=1}^{n} v_k^2 + v_{n+1}^2$$

$$= \langle v, v \rangle = \|v\|^2 \Rightarrow \|v\|' = \|v\|$$

$\square$

Rest siehe Skript