Definition der Jordanmatrizen

Definition (14.12)

Eine Matrix $J \in \mathscr{M}_{n,K}$ heißt Jordanmatrix zum Eigenwert $\lambda \in K$, wenn sie die Form

$$J = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & \\ 0 & 0 & 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} \qquad \text{besitzt.}$$

Definition der Jordanschen Normalform

Eine Matrix $A \in \mathscr{M}_{n,K}$ befindet sich in Jordanscher Normalform, wenn sie als Blockmatrix in der Form

$$A = \begin{pmatrix} J_1 & & & \\ & J_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_r \end{pmatrix}$$

mit Jordanmatrizen $J_1, ..., J_r$ schreiben lässt. Man bezeichnet diese dann als die Jordanblöcke der Matrix A.

Eigenschaften einer Jordanmatrix

Proposition (14.13)

Sei V ein n-dimensionaler K-Vektorraum, $\psi \in \mathrm{End}_K(V)$ und $\mathscr{B}$ eine geordnete Basis mit der Eigenschaft, dass $J = \mathscr{M}_{\mathscr{B}}(\psi)$ eine Jordanmatrix zum Eigenwert $\lambda \in K$ ist. Dann gilt

(i) Der einzige Eigenwert von ψ ist λ. Die algebraische und die geometrische Vielfachheit dieses Eigenwerts sind durch $\mu_a(\psi, \lambda) = n$ und $\mu_g(\psi, \lambda) = 1$ gegeben.

(ii) Es gilt $\mu_\psi = \chi_\psi = (x - \lambda)^n$.

Zerlegung von Eigenräumen

Lemma (14.14)

Sei V ein K-Vektorraum mit einer Zerlegung $V = U_1 \oplus ... \oplus U_r$ als direkte Summe von Untervektorräumen $U_i \leq V$, und sei $\psi \in \mathrm{End}_K(V)$ mit $\psi(U_i) \subseteq U_i$ für $1 \leq i \leq r$. Dann gilt für jedes $\lambda \in K$ jeweils

$$\mathrm{Eig}(\psi, \lambda) \quad = \quad \mathrm{Eig}(\psi|_{U_1}, \lambda) \oplus ... \oplus \mathrm{Eig}(\psi|_{U_r}, \lambda).$$

Dabei sei B_i $(1 \le i \le r)$ die Teilbasis B gehörend zum i-ten

zum Beweis von Lemma (14.14):

Nachweis der Inklusion „$\subseteq$"

Sei $v \in \mathrm{Eig}(\phi, \lambda)$. $V = U_1 \oplus \dots \oplus U_r \Rightarrow \exists\, u_i \in U_i$ $(1 \le i \le r)$ mit $v = u_1 + \dots + u_r$. Es gilt

$$\sum_{i=1}^{r} \psi(u_i) = \psi\left(\sum_{i=1}^{r} u_i\right) = \psi(v) = \lambda v = \lambda\left(\sum_{i=1}^{r} u_i\right) = \sum_{i=1}^{r} (\lambda u_i), \quad \lambda u_i, \psi(u_i) \in U_i \quad 1 \le i \le r$$

Eindeutigkeit der Summenzerlegung $\Rightarrow \psi(u_i) = \lambda_i$ $(1 \le i \le r)$ $\Rightarrow v = u_1 + \dots + u_r$

$\Rightarrow u_i \in \mathrm{Eig}(\psi|_{U_i}, \lambda_i)$ $(1 \le i \le r)$

$\in \bigoplus_{i=1}^{r} \mathrm{Eig}(\psi|_{U_i}, \lambda_i)$ $\square$

Endomorphismen mit Darstellung in Jordanscher Normalform

Satz (14.15)

Sei V ein n-dimensionaler K-Vektorraum, $\psi \in \mathrm{End}_K(V)$ und $\mathscr{B}$ eine geordnete Basis mit der Eigenschaft, dass $A = \mathscr{M}_{\mathscr{B}}(\psi)$ in Jordanscher Normalform vorliegt. Sei $\lambda \in K$ ein Eigenwert von ψ. Dann gilt

(i) Sowohl χ_ψ als auch μ_ψ zerfallen in Linearfaktoren.

(ii) Die geometrische Vielfachheit $\mu_g(\psi, \lambda)$ ist gleich der Anzahl aller Jordanblöcke von A zum Eigenwert λ.

(iii) Die algebraische Vielfachheit $\mu_a(\psi, \lambda)$ ist gleich der Summe der Größen aller Jordanblöcke von A zum Eigenwert λ.

(iv) Die Vielfachheit von λ als Nullstelle von μ_ψ ist gleich der Größe des größten Jordanblocks zum Eigenwert λ.

$\ldots (\Psi, \lambda_i)$ $\square$

Beweis von Satz (14.15)

zu (i) Beh: χ_Ψ, μ_Ψ zerfallen

$xE_n - A$ ist obere Dreiecksmatrix, da A als JNF obere Dreiecksmatrix. $a_1, \dots, a_n \in K$ Diagonaleinträge von A $\Rightarrow \chi_\Psi = \chi_A = \det(xE_n - A) = (x-a_1)\cdot \ldots \cdot (x-a_n)$

Als Teiler von χ_Ψ zerfällt auch μ_Ψ.

zu (ii) Beh: $\mu_g(\Psi, \lambda)$ = Anzahl der Jordanblöcke mit Eigenw. λ

Für jeden Eigenw. α sei $S(\alpha) = \{i \mid \lambda_i = \alpha\}$, wobei λ_i Eigenwert vom i-ten Jordanblock J_i in der Matrix A.

$\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$ geordnete Basis von V mit $M_{\mathcal{B}}(\Psi) = A$.

Dabei sei $\mathcal{B}_i$ $(1 \le i \le r)$ die Teilbasis $\mathcal{B}$ gehörend zum i-ten

... $a_1, \dots, a_n \in K$ Diagonaleinträge ... als JNF

von $A \Rightarrow \chi_\psi = \chi_A = \det(xE_n - A) = (x-a_1)\cdot \ldots \cdot (x-a_n)$

Als Teiler von χ_ψ zerfällt auch ...

Jordanblock J_i. Sei $U_i = \mathrm{lin}(B_i)$ $(1 \le i \le r)$
und $\psi_i = \psi|_{U_i}$. Dann gilt $\psi_i(U_i) \subseteq U_i$
und $J_i = M_{B_i}(\psi_i)$. ψ_i hat als Darst.-matrix
eine Jordanmatrix $(14.13) \Rightarrow \mathrm{Eig}(\psi_i, \lambda_i) = 1$

$(14.14) \Rightarrow \mathrm{Eig}(\psi, \alpha) = \bigoplus_{i=1}^{r} \mathrm{Eig}(\psi_i, \alpha)$ für
jedes $\alpha \in K$ $\quad \dim \mathrm{Eig}(\psi_i, \alpha) = \begin{cases} 1 & \text{falls } \alpha = \lambda_i \\ 0 & \text{falls } \alpha \neq \lambda_i \end{cases}$

$\Rightarrow \mu_g(\psi, \lambda_i) = \dim \mathrm{Eig}(\psi, \lambda_i) = \sum_{j=1}^{r} \dim \mathrm{Eig}(\psi_j, \lambda_i)$

$= |S(\lambda_i)| =$ Anzahl Jordanblöcke zum Eigenwert λ_i

Eigenwert λ_i

zu (iii) $\mu_a(\varphi, \lambda) =$ Summe der Größe aller Jordanblöcke zum Eigenwert λ

Sei s_i jeweils die Größe von J_i für $1 \leq i \leq r$.

Dann ist $\chi_\varphi = \prod_{i=1}^{r} (x-\lambda_i)^{s_i}$ Die Vielfachheit von λ als Nullstelle von χ_φ ist somit $\sum_{\substack{i=1 \\ \lambda_i=\lambda}}^{r} s_i$. $\square$

zu (iv) siehe Skript

Beispiel: Matrizen in JNF mit einem Eigenwert

$$J_1 = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

$$\chi_{J_1} = \mu_{J_1} = (x-\lambda)^5$$
$$\mu_a(J_1,\lambda) = 5, \mu_g(J_1,\lambda) = 1$$

$$J_2 = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

$$\chi_{J_2} = (x-\lambda)^5, \mu_{J_2} = (x-\lambda)^4$$
$$\mu_a(J_2,\lambda) = 5, \mu_g(J_2,\lambda) = 2$$

$$J_3 = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

$$\chi_{J_3} = (x-\lambda)^5, \mu_{J_3} = (x-\lambda)^3$$
$$\mu_a(J_3,\lambda) = 5, \mu_g(J_3,\lambda) = 2$$

$$J_4 = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

$$\chi_{J_4} = (x-\lambda)^5, \mu_{J_4} = (x-\lambda)^2$$
$$\mu_a(J_4,\lambda) = 5, \mu_g(J_4,\lambda) = 3$$

Beispiel: Matrizen in JNF mit einem Eigenwert (Forts.)

$$J_5 = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

$$\chi_{J_5} = (x-\lambda)^5, \mu_{J_5} = (x-\lambda)^2$$
$$\mu_a(J_5,\lambda) = 5, \mu_g(J_5,\lambda) = 4$$

$$J_6 = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

$$\chi_{J_6} = (x-\lambda)^5, \mu_{J_6} = x-\lambda$$
$$\mu_a(J_6,\lambda) = \mu_g(J_6,\lambda) = 5$$

Der Zerlegungssatz

Zwei Polynome $f, g \in K[x]$ werden teilerfremd genannt, wenn es kein Polynom $h \in K[x]$ vom Grad ≥ 1 gibt, dass sowohl f als auch g teilt. In der Zahlentheorie-Vorlesung beweisen wir das sog. Lemma von Bézout, welches besagt, dass für zwei solche Polynome jeweils $u, v \in K[x]$ mit $uf + vg = 1$ existieren.

Satz (14.16)

Sei V ein endlich-dimensionaler K-Vektorraum und $\phi \in \mathrm{End}_K(V)$. Seien $f, g \in K[x]$ teilerfremde Polynome mit der Eigenschaft, dass fg ein Vielfaches von μ_ϕ ist.

(i) Dann gilt $V = \ker f(\phi) \oplus \ker g(\phi)$.

(ii) Die Untervektorräume $\ker f(\phi)$ und $\ker g(\phi)$ invariant unter dem Endomorphismus ϕ.

Beweis des Zerlegungssatzes (14.16):

Beh: $\ker f(\phi) \cap \ker g(\phi) = \{0_V\}$ „$\supseteq$" klar

„$\subseteq$" Ang. $\exists\, v \in \ker f(\phi) \cap \ker g(\phi)$ mit $v \neq 0$

$f(\phi)(v) = 0_V$, $g(\phi)(v) = 0 \Rightarrow \mu_{\phi,v}$ ist gem.
Teiler von f und g ↯ da f, g teilerfremd

Beh: $V = \ker f(\phi) + \ker g(\phi)$ „$\supseteq$" klar

„$\subseteq$" Sei $v \in V$ Bézout $\Rightarrow \exists\, u, v \in K[x] : uf + vg = 1$

$\Rightarrow f(\phi) \circ u(\phi) + g(\phi) \circ v(\phi) = id_V$

fg Vielfaches von $\mu_\phi \Rightarrow (fg)(\phi) = 0$, $(gf)(\phi) = 0$

$\Rightarrow f(\phi) \circ g(\phi) = g(\phi) \circ f(\phi) = 0$

$$f(\phi)\circ g(\phi) = g(\phi)\circ f(\phi) = 0$$

Sei $w = (g(\phi)\circ v(\phi))(v)$, $w' = (f(\phi)\circ u(\phi))(v)$

$$\phi(f)(w) = (\underbrace{f(\phi)\circ g(\phi)}\circ v(\phi))(v) = 0$$

$\Rightarrow w \in \ker f(\phi) = 0$. genauso: $w' \in \ker g(\phi)$

$$w + w' = (g(\phi)\circ v(\phi) + f(\phi)\circ u(\phi))(v) = id_V(v) = v$$

Zeige noch: $\ker f(\phi)$ ϕ-invariant (für $\ker g(\phi)$ genauso)

Sei $h = xf \Rightarrow h(\phi) = \phi\circ f(\phi) = f(\phi)\circ\phi$

Sei $v \in \ker f(\phi)$. z.zg.: $\phi(v) \in \ker f(\phi)$

$$f(\phi)(\phi(v)) = (f(\phi)\circ\phi)(v) = (\phi\circ f(\phi))(v) \overset{v\in\ker f(\phi)}{=} \phi(0_V) = 0_V \Rightarrow \phi(v)\in\ker f(\phi) \quad \square$$

Definition der Haupträume eines Endomorphismus

Definition (14.17)

Sei V ein endlich-dimensionaler K-Vektorraum, $\phi \in \mathrm{End}_K(V)$ und $\lambda \in K$. Dann wird

$$\mathrm{Hau}(\phi, \lambda) = \bigcup_{r=0}^{\infty} \ker((\phi - \lambda \mathrm{id}_V)^r)$$

der Hauptraum zum Wert λ genannt.

Die Hauptraumzerlegung

Proposition (14.18)

Sei V ein endlich-dimensionaler K-Vektorraum und ϕ ein Endomorphismus von V, dessen charakteristisches Polynom χ_ϕ über K in Linearfaktoren zerfällt. Es seien $\lambda_1, ..., \lambda_r \in K$ die Eigenwerte von ϕ, und für $1 \le i \le r$ sei e_i jeweils die Vielfachheit von λ_i als Nullstelle des Minimalpolynoms μ_ϕ. Dann gilt

$$V \quad = \quad \bigoplus_{i=1}^{r} \mathrm{Hau}(\phi, \lambda_i)$$

und $\mathrm{Hau}(\phi, \lambda_i) = \ker((\phi - \lambda_i \mathrm{id}_V)^{e_i})$ für $1 \le i \le r$.

Rechenbeispiel zur Hauptraumzerlegung im Skript auf Seite 146 !

Ansatz zum Beweis der Hauptraumzerlegung:

$\lambda_1, \dots, \lambda_r$ Eigenwerte von ϕ; $\chi_\phi = \prod_{i=1}^{r} (x - \lambda_i)^{e_i}$

χ_ϕ Vielfaches von μ_ϕ

Wende den Zerlegungssatz an auf $f = (x - \lambda_1)^{e_1}$

und $g = \prod_{i=2}^{r} (x - \lambda_i)^{e_i}$ Es gilt $\ker f(\phi) = \mathrm{Hau}(\phi, \lambda_1)$

Nilpotente Endomorphismen

Definition (14.19)

Sei V ein K-Vektorraum. Einen Endomorphismus $\phi : V \to V$ bezeichnet man als nilpotent, wenn ein $p \in \mathbb{N}$ mit $\phi^p = 0_{\mathrm{End}_K(V)}$ existiert. Ebenso bezeichnet man eine Matrix $A \in \mathscr{M}_{n,K}$ als nilpotent, wenn es ein $p \in \mathbb{N}$ mit $A^p = 0_{\mathscr{M}_{n,K}}$ gibt.

Sei V ein endlich-dimensionaler K-Vektorraum und $\phi \in \mathrm{End}_K(V)$ ein Endomorphismus mit der Eigenschaft, dass χ_ϕ über K in Linearfaktoren zerfällt. Sei $\lambda \in K$ ein Eigenwert von ϕ. Dann ist

$$\psi \quad = \quad (\lambda \mathrm{id}_V - \phi)|_{\mathrm{Hau}(\phi,\lambda)}$$

ein nilpotenter Endomorphismus von $\mathrm{Hau}(\phi, \lambda)$.

Anzahl der Jordanblöcke

Satz (14.20)

Sei V ein K-Vektorraum der endlichen Dimension n, $\psi \in \mathrm{End}_K(V)$ ein nilpotenter Endomorphismus und $V_k = \ker(\psi^k)$, $d_k = \dim V_k$ für alle $k \geq 0$. Desweiteren sei $\mathscr{B}$ eine Jordanbasis von V bezüglich ψ, und für jedes $k \in \mathbb{N}$ sei a_k jeweils die Anzahl der Jordanblöcke von $\mathscr{M}_{\mathscr{B}}(\psi)$ (zum Eigenwert 0) der Größe k. Dann gilt

$$a_k \quad = \quad 2d_k - d_{k-1} - d_{k+1} \qquad \text{für } 1 \leq k \leq n.$$

Bestimmung der Jordanschen Normalform

Sei $A \in \mathscr{M}_{n,K}$ mit zerfallendem charakteristischen Polynom χ_A.

(1) Berechne das charakteristische Polynom $\chi_A \in K[x]$ und dessen Nullstellen $\lambda_1, ..., \lambda_r$ in K, also die Eigenwerte von A, sowie für jeden Eigenwert λ_i dessen algebraische Vielfachheit $\mu_a(A, \lambda_i)$.

(2) Berechne für $1 \leq i \leq r$ und $1 \leq k \leq \mu_a(A, \lambda_i)$ jeweils $d_{i,k} = \dim \ker((A - \lambda_i E^{(n)})^k)$.

(3) Berechne für $1 \leq i \leq r$ und $1 \leq k \leq \mu_a(A, \lambda_i)$ jeweils $a_{i,k} = 2d_{i,k} - d_{i,k-1} - d_{i,k+1}$. Eine Jordansche Normalform von A enthält dann jeweils genau $a_{i,k}$ Jordanblöcke der Größe k zum Eigenwert λ_i.

Bitte beachten Sie die Beispiele zur Berechnung der JNF auf den Skriptseiten 148 und 149.

Hinweis: Die nachfolgenden Sätze zum Nachweis der Existenz der Jordanschen Normalform (bis einschließlich Satz 14.25) wurden in der Vorlesung nicht besprochen und sind daher weder übungs- noch prüfungsrelevant.

Struktur nilpotenter Endomorphismen, Teil I

Lemma (14.21)

Sei V ein endlich-dimensionaler K-Vektorraum, $\psi \in \mathrm{End}_K(V)$ ein nilpotenter Endomorphismus und $p \in \mathbb{N}$ minimal mit $\psi^p = 0_{\mathrm{End}_K(V)}$. Dann haben die Untervektorräume von $V_0, ..., V_p$ von V gegeben durch $V_k = \ker(\psi^k)$ für $0 \le k \le p$ die folgenden Eigenschaften.

- Es gilt $\{0_V\} = V_0 \subsetneq V_1 \subsetneq ... \subsetneq V_{p-1} \subsetneq V_p = V$.
- Für $1 \le k \le p$ gilt $\psi^{-1}(V_{k-1}) = V_k$.
- Ist $k \in \{1, ..., p\}$ und U ein Untervektorraum von V mit $V_k \cap U = \{0_V\}$, dann ist die eingeschränkte Abbildung $\psi|_U$ injektiv.

Struktur nilpotenter Endomorphismen, Teil II

Satz (14.22)

Sei V ein endlich-dimensionaler K-Vektorraum, $\psi \in \mathrm{End}_K(V)$ ein nilpotenter Endomorphismus und $p \in \mathbb{N}$ minimal mit $\psi^p = 0_{\mathrm{End}_K(V)}$. Sei $V_k = \ker(\psi^k)$ für $0 \le k \le p$. Dann gibt es in V Untervektorräume $U_1, ..., U_p$ und $W_1, ..., W_{p-1}$, so dass folgende Bedingungen erfüllt sind.

- Es gilt $\psi(U_k) \subseteq U_{k-1}$ für $2 \le k \le p$.
- Es gilt $V_k = V_{k-1} \oplus U_k$ für $1 \le k \le p$ und $U_k = \psi(U_{k+1}) \oplus W_k$ für $1 \le k \le p-1$.

Sind die Untervektorräume U_k und W_k auf diese Weise gewählt, dann ist die Einschränkung $\psi|_{U_k}$ für $2 \le k \le p$ jeweils injektiv.

Konstruktion geeigneter Basen

Proposition (14.23)

Seien die Bezeichnungen V, p, ψ und V_k für $0 \le k \le p$ wie in Satz (14.22) definiert.Seien $U_1, ..., U_p$ und $W_1, ..., W_{p-1}$ Untervektorräume mit den dort unter (i) und (ii) angegebenen Eigenschaften, und außerdem $W_p = U_p$. Für $1 \le k \le p$ sei $\mathscr{B}_k$ jeweils eine Basis von W_k, und für $0 \le \ell \le k-1$ sei jeweils $\mathscr{B}_k^{(\ell)} = \psi^\ell(\mathscr{B}_k)$, also die Menge, die durch ℓ-fache Anwendung von ψ auf die Elemente von $\mathscr{B}_k$ entsteht. Dann ist

$$\mathscr{B} \quad = \quad \bigcup_{k=1}^{p} \bigcup_{\ell=0}^{k-1} \mathscr{B}_k^{(\ell)}$$

eine disjunkte Vereinigung und eine Basis von V.

Jordanketten und Jordanbasen

Definition (14.24)

Sei V ein K-Vektorraum der endlichen Dimension n und $\psi \in \mathrm{End}_K(V)$ nilpotent.

- Eine geordnete Basis $(v_1, ..., v_n)$ von V heißt Jordanbasis bezüglich ψ, wenn für $1 \le k \le n$ jeweils $\psi(v_k) = v_{k-1}$ oder $\psi(v_k) = 0_V$ gilt, wobei wir $v_0 = 0_V$ setzen.
- Für jedes $m \in \mathbb{N}$ wird ein Tupel $(v_1, ..., v_m)$ von Vektoren eine Jordankette der Länge m bezüglich ψ genannt, wenn $\psi(v_k) = v_{k-1}$ für $1 \le k \le m$ erfüllt ist, wobei wieder $v_0 = 0_V$ gesetzt wird.

Eine geordnete Basis ist also genau dann eine Jordanbasis, wenn sie aus mehreren Jordanketten zusammengesetzt ist.

Konstruktion von Jordanbasen

Satz (14.25)

Die Basis $\mathscr{B}$ aus Prop. (14.23) kann so angeordnet werden, dass eine Jordanbasis von V bezüglich ψ entsteht.

Verfahren zur Bestimmung einer Jordanbasis, Teil I

(1) Bestimme eine Basis $\mathscr{C}_k$ von $V_k = \ker(\psi^k)$ für $1 \leq k \leq p$.

(2) Berechne für $1 \leq k \leq p$ die Anzahl a_k der Jordanblöcke der Größe k, wie in Satz (14.20) angegeben.

(3) Für $k = p, p-1, ..., 1$ wähle jeweils a_k Vektoren $w_1^{(k)}$, ..., $w_{a_k}^{(k)}$ aus $\mathscr{C}_k$ zufällig.

Verfahren zur Bestimmung einer Jordanbasis

(4) Für $k = p, p-1, ..., 1$ und $1 \leq j \leq a_k$ ordne jeweils die Vektoren $\psi^{k-1}(w_j^{(k)}), ..., \psi(w_j^{(k)}), w_j^{(k)}$ nacheinander an. Diese bilden eine Jordankette bezüglich ψ.

(5) Fügen sich die unter (4) bestimmten Jordanketten zu einer Basis zusammen, so handelt sich um eine Jordanbasis bezüglich ψ, und das Verfahren ist abgeschlossen. (In der zugehörigen Darstellungsmatrix von ψ sind die Jordanblöcke nach absteigender Größe angeordnet.)

(6) Ansonsten wiederhole das Verfahren ab Schritt (3).

Bitte beachten Sie die Rechenbeispiele zur Bestimmung von Jordanbasen auf den Skriptseiten 153 und 154.