## § 14. Satz von Cayley-Hamilton und Jordansche Normalform

**Definition (14.1)**

Ein Ringhomomorphismus ist eine Abbildung $\phi : R \to S$ zwischen Ringen $R, S$ mit den Eigenschaften $\phi(1_R) = 1_S$, $\phi(a+b) = \phi(a) + \phi(b)$ und $\phi(ab) = \phi(a)\phi(b)$ für alle $a, b \in R$.

Beispiel für einen Ringhom.

Auswertung an der Stelle 42

$\phi : \mathbb{Q}[x] \to \mathbb{Q},\ f \mapsto f(42)$

Bsp.: $f = x+2,\ g = x-5$

$\phi(fg) = \phi(x^2 - 3x - 10) = 42^2 - 3 \cdot 42 - 10 =$

$1764 - 126 - 10 = 1628$

$\phi(f) \cdot \phi(g) = (42+2)(42-5) = 44 \cdot 37$
$= 1628$

$42 \cdot 42$
$168$
$+84$
$1764$

$44 \cdot 37$
$132$
$308$
$1628$

## Universelle Eigenschaft des Polynoms

### Proposition (14.2)

Ist $K$ ein Körper und $\phi : K \to S$ ein Ringhomomorphismus und $a \in S$ ein beliebig gewähltes Element, dann gibt es einen eindeutig bestimmten Ringhomomorphismus $\hat{\phi} : K[x] \to S$ mit $\hat{\phi}(x) = a$ und $\hat{\phi}|_K = \phi$. Häufig wird ein solcher Homomorphismus als Einsetzhomomorphismus bezeichnet.

## Anwendung der universellen Eigenschaft

(1) Ist $K$ ein Körper und $n \in \mathbb{N}$, dann gibt es für jede Matrix $A \in \mathscr{M}_{n,K}$ einen Ringhomomorphismus $K[x] \to \mathscr{M}_{n,K}$, der ein beliebiges Polynom
$f = a_m x^m + a_{m-1} x^{m-1} + ... + a_1 x + a_0 \in K[x]$
auf die Matrix
$f(A) = a_m A^m + a_{m-1} A^{m-1} + ... + a_1 X + a_0 E$ abbildet.

(2) Ist $K$ ein Körper und $V$ ein endlich-dimensionaler $K$-Vektorraum, dann existiert für jeden Endomorphismus $\phi$ von $V$ ein Ringhomomorphismus, der ein Polynom $f$ wie unter (1) auf den Endomorphismus
$f(\phi) = a_m \phi^m + a_{m-1} \phi^{m-1} + ... + a_1 \phi + a_0 \mathrm{id}_V$ abbildet.

**Beispiel:** $x^2+3x-5 =: f$, $A = \begin{pmatrix}2&0\\-1&3\end{pmatrix}$

$$f(A) = A^2+3A-5E = \begin{pmatrix}2&0\\-1&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&0\\-1&3\end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix}2&0\\-1&3\end{pmatrix}$$

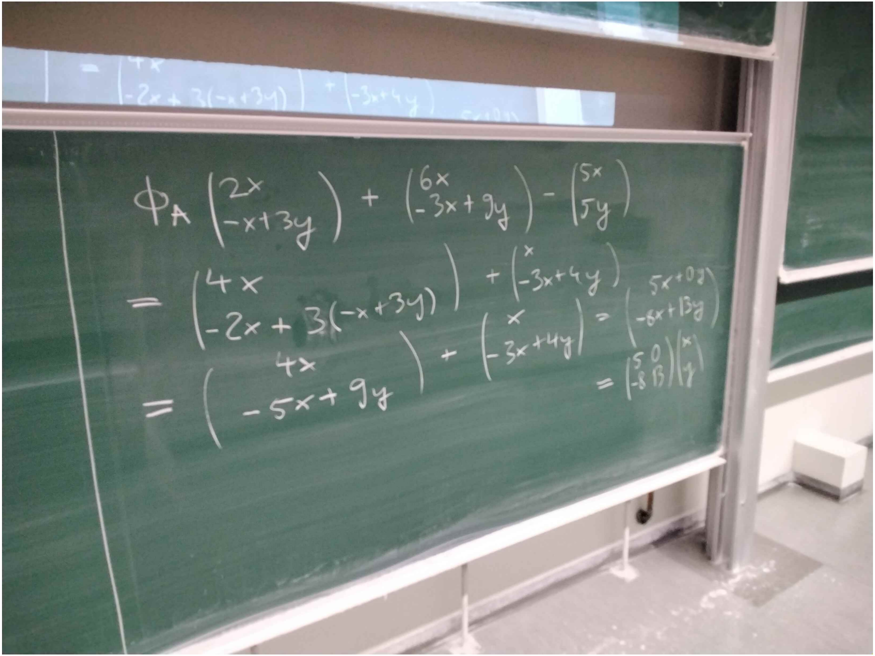
$$- 5\cdot\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4&0\\-5&9\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}6&0\\-3&9\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-5&0\\0&-5\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix}5&0\\-8&13\end{pmatrix}$$

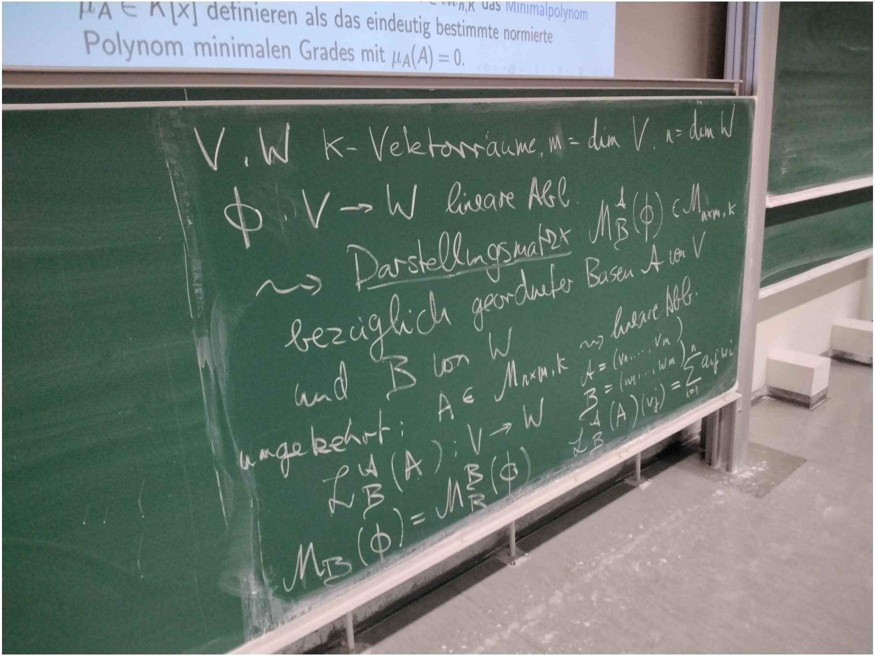
$$\phi_A : \mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2,\ \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\mapsto \begin{pmatrix}2&0\\-1&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2x\\-x+3y\end{pmatrix}$$

$$f(\phi_A) = \phi_A^2 + 3\phi_A - 5\cdot id_{\mathbb{R}^2}$$

$$f(\phi_A)\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \phi_A^2\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} + 3\phi_A\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} - 5\cdot id_{\mathbb{R}^2}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$$



$\Phi_A \begin{pmatrix} 2x \\ -x+3y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6x \\ -3x+9y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5x \\ 5y \end{pmatrix}$
$= \begin{pmatrix} 4x \\ -2x+3(-x+3y) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x \\ -3x+4y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5x+0y \\ -8x+13y \end{pmatrix}$
$= \begin{pmatrix} 4x \\ -5x+9y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x \\ -3x+4y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ -8 & 13 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$


das Minimalpolynom
μA ∈ K[x] definieren als das eindeutig bestimmte normierte
Polynom minimalen Grades mit μA(A) = 0.
V, W K-Vektorräume, m = dim V, n = dim W
Φ: V → W lineare Abb.
⇝ Darstellungsmatrix M^A_B(Φ) ∈ M_{n×m,K}
bezüglich geordneter Basen A von V
und B von W
umgekehrt: A ∈ M_{n×m,K} ⇝ lineare Abb.
A = (v1, …, vm)
B = (w1, …, wm)
L^A_B(A)(vj) = Σ_{i=1}^n aij wi
L^A_B(A): V → W
M_B(Φ) = M^B_B(Φ)

## Verträglichkeit zwischen Einsetzhomomorphismus und Darstellungsmatrix

**Lemma (14.3)**

Sei $f \in K[x]$, $f \in \mathrm{End}_K(V)$ und $A \in \mathscr{M}_n(K)$. Dann gilt

$$\mathscr{M}_{\mathscr{B}}(f(\phi)) = f(\mathscr{M}_{\mathscr{B}}(\phi)) \qquad \text{und} \qquad \mathscr{L}_{\mathscr{B}}(f(A)) = f(\mathscr{L}_{\mathscr{B}}(A)).$$

# Definition des Minimalpolynoms

**Proposition (14.4)**

Sei $V$ ein endlich-dimensionaler $K$-Vektorraum. Für jedes $\phi \in \mathrm{End}_K(V)$ gibt es ein Polynom $0_K \neq f \in K[x]$ mit $f(\phi) = 0_{\mathrm{End}_K(V)}$.

**Definition (14.5)**

Sei $V$ ein endlich-dimensionaler $K$-Vektorraum und $\phi \in \mathrm{End}_K(V)$. Ist $f \in K[x]$ ein normiertes Polynom minimalen Grades mit der Eigenschaft $f(\phi) = 0_{\mathrm{End}_K(V)}$, so nennt man es ein Minimalpolynom von $\phi$.

Ebenso können wir für jede Matrix $A \in \mathscr{M}_{n,K}$ das Minimalpolynom $\mu_A \in K[x]$ definieren als das eindeutig bestimmte normierte Polynom minimalen Grades mit $\mu_A(A) = 0$.

## Existenz und Eindeutigkeit des Minimalpolynoms

**Satz (14.6)**

Sei $V$ ein endlich-dimensionaler $K$-Vektorraum. Für jedes $\phi \in \mathrm{End}_K(V)$ gibt es genau ein Minimalpolynom, das wir mit $\mu_\phi$ bezeichnen. Ist $f \in K[x]$ ein beliebiges Polynom mit $f(\phi) = 0_{\mathrm{End}_K(V)}$, dann ist $\mu_\phi$ ein Teiler von $f$.

## Definition der Begleitmatrix

### Satz (14.7)

Für jedes normierte, nicht-konstante Polynom $f = x^n + \sum_{k=0}^{n-1} a_k x_k \in K[x]$ bezeichnet man die Matrix $A_f \in \mathscr{M}_{n,K}$ gegeben durch

$$A_f = \begin{pmatrix} 0 & & & & -a_0 \\ 1 & 0 & & & -a_1 \\ & 1 & \ddots & & \vdots \\ & & \ddots & 0 & -a_{n-2} \\ & & & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix}$$

als Begleitmatrix von $f$. Diese erfüllt die Beziehung $\chi_{A_f} = f$.

## Minimalpolynom eines Vektors

**Proposition (14.8)**

Sei $V$ ein endlich-dimensionaler $K$-Vektorraum. Für jedes $\phi \in \mathrm{End}_K(V)$ und jeden Vektor $0_V \neq v \in V$ gibt es ein eindeutig bestimmtes, normiertes Polynom $\mu_{\phi,v}$ minimalen Grades mit $\mu_{\phi,v}(\phi)(v) = 0_V$. Wir nennen es das Minimalpolynom von $\phi$ bezüglich $v$. Jedes $f \in K[x]$ mit $f(\phi)(v) = 0_V$ ist ein Vielfaches von $\mu_{\phi,v}$.

## Satz von Cayley-Hamilton

### Satz (14.9)

Sei $V$ ein endlich-dimensionaler $K$-Vektorraum, $\phi \in \mathrm{End}_K(V)$ und $\chi_\phi$ sein charakteristisches Polynom. Dann gilt $\chi_\phi(\phi) = 0_{\mathrm{End}_K(V)}$.

### Folgerung (14.10)

Sei $n \in \mathbb{N}$, $K$ ein Körper und $V$ ein endlich-dimensionaler $K$-Vektorraum.

(i) Für alle $A \in \mathscr{M}_{n,K}$ gilt $\chi_A(A) = 0$.

(ii) Für alle $A \in \mathscr{M}_{n,K}$ ist $\mu_A$ ein Teiler von $\chi_A$.

(iii) Ist $\phi \in \mathrm{End}_K(V)$, dann ist $\mu_\phi$ ein Teiler von $\chi_\phi$.

Aussage des Satzes von Cayley-Hamilton

$$A \in M_{n,K} \Rightarrow \chi_A(A) = 0_{M_{n,K}}$$

<u>Bsp.</u> $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow \chi_A = \det\begin{pmatrix} x-1 & -2 \\ -3 & x-4 \end{pmatrix} =$

$(x-1)(x-4)-6 = x^2-5x-2$

$$\chi_A(A) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} - 5\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 7 & 10 \\ 15 & 22 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 & 10 \\ 15 & 20 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

**Bem.:** Es kann sowohl $\mu_A = \chi_A$ als auch $\mu_A \neq \chi_A$ gelten.

**Bsp.:** (i) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ $\quad \chi_A = (x-2)^2$

Aus Cayley-H folgt, dass $\mu_A$ immer $\chi_A$ teilt

$\Rightarrow$ nur $\mu_A \in \{1, x-2, (x-2)^2\}$

$g = 1 \Rightarrow g(A) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$g = x-2 \Rightarrow g(A) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$$g = (x-2)^2 = x^2 - 4x + 4 \Longrightarrow$$

$$g(A) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} - 4\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 8 & 4 \\ 0 & 8 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Longrightarrow \mu_A = (x-2)^2 = \chi_A$$

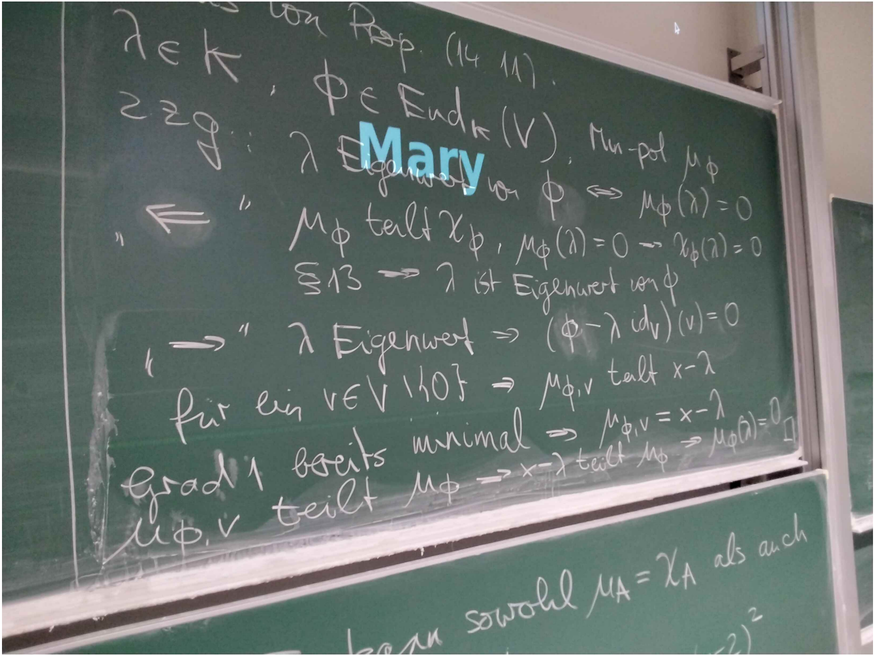
(ii) $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ $\quad \chi_B = (x-2)^2$

$$\mu_B = x - 2$$

## Eigenwerte als Nullstellen des Minimalpolynoms

**Proposition (14.11)**

Für jeden endlich-dimensionalen $K$-Vektorraum $V$ und jedes $\phi \in \mathrm{End}_K(V)$ sind die Nullstellen von $\mu_\phi$ genau die Eigenwerte von $\phi$.


von Prop. (14.11).
$\lambda \in K$, $\phi \in End_K(V)$, Min-pol $\mu_\phi$
zzg: $\lambda$ Eigenwert von $\phi \Leftrightarrow \mu_\phi(\lambda) = 0$
Mary
„$\Leftarrow$" $\mu_\phi$ teilt $\chi_\phi$, $\mu_\phi(\lambda) = 0 \Rightarrow \chi_\phi(\lambda) = 0$
§13 $\Rightarrow$ $\lambda$ ist Eigenwert von $\phi$
„$\Rightarrow$" $\lambda$ Eigenwert $\Rightarrow (\phi - \lambda\, id_V)(v) = 0$
für ein $v \in V \setminus \{0\} \Rightarrow \mu_{\phi,v}$ teilt $x - \lambda$
Grad 1 bereits minimal $\Rightarrow \mu_{\phi,v} = x - \lambda$
$\mu_{\phi,v}$ teilt $\mu_\phi \Rightarrow x - \lambda$ teilt $\mu_\phi \Rightarrow \mu_\phi(\lambda) = 0$ □
kann sowohl $\mu_A = \chi_A$ als auch

## Definition der Jordanmatrizen

### Definition (14.12)

Eine Matrix $J \in \mathscr{M}_{n,K}$ heißt Jordanmatrix zum Eigenwert $\lambda \in K$, wenn sie die Form

$$J \quad = \quad \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & \\ 0 & 0 & 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} \qquad \text{besitzt.}$$

## Definition der Jordanschen Normalform

Eine Matrix $A \in \mathscr{M}_{n,K}$ befindet sich in Jordanscher Normalform, wenn sie als Blockmatrix in der Form

$$A = \begin{pmatrix} J_1 & & & \\ & J_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_r \end{pmatrix}$$

mit Jordanmatrizen $J_1, ..., J_r$ schreiben lässt. Man bezeichnet diese dann als die Jordanblöcke der Matrix $A$.

## Eigenschaften einer Jordanmatrix

### Proposition (14.13)

Sei $V$ ein $n$-dimensionaler $K$-Vektorraum, $\psi \in \mathrm{End}_K(V)$ und $\mathscr{B}$ eine geordnete Basis mit der Eigenschaft, dass $J = \mathscr{M}_{\mathscr{B}}(\psi)$ eine Jordanmatrix zum Eigenwert $\lambda \in K$ ist. Dann gilt

(i) Der einzige Eigenwert von $\psi$ ist $\lambda$. Die algebraische und die geometrische Vielfachheit dieses Eigenwerts sind durch $\mu_a(\psi, \lambda) = n$ und $\mu_g(\psi, \lambda) = 1$ gegeben.

(ii) Es gilt $\mu_\psi = \chi_\psi = (x - \lambda)^n$.