Analysis mehrerer Variablen

— Lösung Blatt 13 —

(Tutoriumsblatt)

Aufgabe 0

zu (a) Definiert man $F(x,y) = y - f(x)$, dann gilt offenbar $F(x,y) = 0$ genau dann, wenn $y = f(x)$ ist. Also wird f durch die Funktion F impliziert definiert.

zu (b) Die Funktion F ist stetig differenzierbar, und es gilt $\partial_y F(x,y) = 1 \neq 0$ für alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Deshalb kann der über implizite Funktionen auf jede Nullstelle (x,y) von F angewendet werden.

zu (c) Die Gerade ist eine 1-dimensionale Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^2$, die durch die Funktion $\varphi(x,y) = x + y + 1$ beschrieben wird, weil die Ableitung $\varphi'(x,y) = (1\ \ 1)$ nirgends verschwindet und somit immer einen eindimensionalen Untervektorraum von $\mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ aufspannt. Ist (x,y) ein lokales Extremum auf der Geraden, so besagt das notwendige Kriterium, dass $f'(x,y) = \lambda\varphi'(x,y)$ für ein $\lambda \in \mathbb{R}$ gelten muss. Wegen $f'(x,y) = (2x\ \ 0)$ ist dies zu $(2x\ \ 0) = \lambda(1\ \ 1)$ äquivalent. Der Vergleich der zweiten Komponente liefert $\lambda = 0$ und $x = \lambda = 0$. Weil (x,y) ein Punkt auf der Geraden ist, muss $(x,y) = (0,-1)$ gelten. Umgekehrt ist das Kriterium für den Punkt $(0,-1)$ erfüllt; es ist also der einzige Punkt mit dieser Eigenschaft.

zu (d) Durch $\mathcal{Z} = \{\frac{1}{2}\}$ wird $[0,1]$ in die beiden Intervalle $[0, \frac{1}{2}]$ und $[\frac{1}{2}, 1]$ zerlegt. Der minimale Wert von f auf diesen Intervallen ist jeweils 0 bzw. $\frac{1}{2}$, die Untersumme ist damit gegeben durch $0 \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$. Für die Obersumme erhält man entsprechend den Wert $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + 1 \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{4}$. Durch $\mathcal{Z} = \varnothing$ bleibt das Intervall unzerlegt. Die Untersumme ist hier gleich dem minimalen Funktionswert auf $[0,1]$, also 0, und die Obersumme ist gleich 1.

Aufgabe 1

Wir wenden den Satz über implizite Funktionen auf die Abbildung $f : X \times Y \to \mathbb{R}$ gegeben durch $f(x,y,u,v) = (u + \cos(uv) - vx - 1, \sin(u) - y - v)$ an, wobei $X = Y = \mathbb{R}^2$ ist. Diese Abbildung ist offenbar stetig differenzierbar, weil die beiden Komponenten aus beliebig oft differenzierbaren Funktionen zusammengesetzt sind. Außerdem ist für einen Punkt $(x,y,u,v) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$ das angegebene Gleichungssystem genau dann erfüllt, wenn $f(x,y,u,v) = (0,0)$ gilt. Die Ableitung von f an einer beliebigen Stelle ist gegeben durch

$$f'(x,y,u,v) \quad = \quad \begin{pmatrix} -v & 0 & 1 - \sin(uv)v & -u\sin(uv) - x \\ 0 & -1 & \cos(u) & -1 \end{pmatrix}$$

an der Stelle $(0,-1,0,1)$ also insbesondere

$$f'(0,-1,0,1) \quad = \quad \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 - \sin(0) \cdot 1 & 0 \\ 0 & -1 & \cos(0) & -1 \end{pmatrix} \quad = \quad \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Die mehrdimensionalen partiellen Ableitungen an dieser Stelle sind also gegeben durch

$$\partial_X f(0,-1,0,1) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad , \quad \partial_Y f(0,-1,0,1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Wegen

$$\det \partial_Y f(0,-1,0,1) \quad = \quad \det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \quad = \quad -1 \quad \neq \quad 0$$

sind insgesamt die Voraussetzungen von Satz (13.8) erfüllt. Es gibt also offene Umgebungen $U' \subseteq \mathbb{R}^2$ von $(0,-1)$ und $U'' \subseteq \mathbb{R}^2$ von $(0,1)$ sowie eine stetig differenzierbare Funktion $\tilde{g} : U' \to U''$ mit der Eigenschaft $f(x,y,u,v) = 0 \Leftrightarrow (u,v) = \tilde{g}(x,y)$ für alle $(x,y) \in U'$ und $(u,v) \in U''$. Bezeichnen wir die beiden Komponenten von $\tilde{g}$ mit g und h, setzen wir also $g = \tilde{g}_1$ und $h = \tilde{g}_2$, so gilt $u = g(x,y)$ und $v = h(x,y)$ genau dann, wenn $f(x,y,u,v) = 0$ ist, und dies ist wiederum genau dann der Fall (wie oben bemerkt), wenn (x,y,u,v) eine Lösung des Gleichungssystems ist.

zu (b) Nach Folgerung (13.9) gilt $\tilde{g}'(x,y) = -\partial_Y f(x,y,u,v)^{-1} \circ \partial_X f(x,y,u,v)$ für alle $(x,y,u,v) \in U' \times U''$. Insbesondere gilt also

$$\begin{aligned} \tilde{g}'(0,-1) &= -\partial_Y f(0,-1,0,1)^{-1} \circ \partial_X f(0,-1,0,1) = -\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \\ &= -\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Weil g und h die beiden Komponenten von $\tilde{g}$ sind, gilt

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \tilde{g}'(0,-1) = \begin{pmatrix} \partial_1 \tilde{g}_1(0,-1) & \partial_2 \tilde{g}_1(0,-1) \\ \partial_1 \tilde{g}_2(0,-1) & \partial_2 \tilde{g}_2(0,-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial_1 g(0,-1) & \partial_2 g(0,-1) \\ \partial_1 h(0,-1) & \partial_2 h(0,-1) \end{pmatrix} ,$$

also $\partial_1 g(0,-1) = 1$, $\partial_2 g(0,-1) = 0$, $\partial_1 h(0,-1) = 1$ und $\partial_2 h(0,-1) = -1$.

Aufgabe 2

zu (a) Wir überprüfen die beiden Bedingungen (i) und (ii) aus Definition (14.1). Setzen wir $\varphi_1(x,y) = x^2 + xy + y^2 - 1$ und $U = \mathbb{R}^2$, dann gilt $E \cap U = \{(x,y) \in U \mid \varphi_1(x,y) = 0\}$. Die Ableitung von φ_1 ist gegeben durch $\varphi_1'(x,y) = (2x+y \quad 2y+x)$ für alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Ist $\varphi_1'(x,y) = 0$, dann gilt $y = -2x$ und $x = -2y$, also $y = -2(-2y) = 4y$, und daraus folgt $y = 0$ und $x = 0$. Aber wegen $\varphi_1(0,0) = -1 \neq 0$ ist $(0,0)$ kein Element der Menge E. Es gilt also $\varphi_1'(x,y) \neq (0 \quad 0)$ und somit $\dim \operatorname{lin}\{\varphi_1'(x,y)\} = 1$ für alle $(x,y) \in E$. Damit ist insgesamt gezeigt, dass E eine 1-dimensionale Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^2$ ist.

zu (b) Wir betrachten auf $\mathbb{R}^2$ die Funktion f gegeben durch $f(x,y) = x^2+y^2$. Gesucht ist das Maximum der Funktion $f|_E$. (An Stelle des Abstands arbeiten wir mit dem Quadrat des Abstands, da sich mit dem Ausdruck x^2+y^2 besser rechnen lässt als mit $\sqrt{x^2+y^2}$.) Ist $(x,y) \in E$ ein lokales Maximum von f, dann existiert nach Satz (14.2) ein $\lambda \in \mathbb{R}$ mit

$$f'(x,y) = \lambda\varphi_1'(x,y) \quad \Leftrightarrow \quad (2x \quad 2y) = \lambda(2x+y \quad 2y+x) \quad \Leftrightarrow \quad 2x = 2\lambda x + \lambda y \text{ und } 2y = 2\lambda y + \lambda x.$$

Durch Addition der beiden Gleichungen erhalten wir $2(x+y) = 3\lambda(x+y) \Leftrightarrow (3\lambda-2)(x+y) = 0$, also $\lambda = \frac{2}{3}$ oder $y = -x$. Im ersten Fall erhalten wir durch Einsetzen in die Gleichung $2x = 2\lambda x + \lambda y$ die Gleichung $2x = \frac{4}{3}x + \frac{2}{3}y$, also $\frac{2}{3}x = \frac{2}{3}y$ und $x = y$. Damit dieser Punkt auf E liegt, muss $x^2+x^2+x^2 = 1$, also $x = \frac{1}{\sqrt{3}} = y$ oder $x = -\frac{1}{\sqrt{3}} = y$ gelten. Dies liefert die beiden Punkte $(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})$ und $(-\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}})$.

Im zweiten Fall $(y = -x)$ erhalten wir durch Einsetzen in E die Gleichung $x^2-x^2+x^2 = 1$, also $x \in \{\pm 1\}$ und $(x,y) \in \{(1,-1),(-1,1)\}$. Da nach den Punkten mit *maximalem* Abstand von $(0,0)$ gefragt war, müssen $(1,-1)$ und $(-1,1)$ die beiden gesuchten Punkte sein. (Es ist leicht zu sehen, dass $(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})$ und $(-\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}})$ die beiden Punkte auf E mit dem *minimalen* Abstand zu $(0,0)$ sind.)

Aufgabe 3

zu (a) Sei $\mathcal{Z} = \{x_1, ..., x_{n-1}\}$ eine beliebige Zerlegung von f. Dann ist für jedes $k \in \{1, ..., n\}$ der Wert $c^-_{k,f} = \inf\{f(x) \mid x \in [x_{k-1}, x_k]\}$ jeweils gleich 0. Denn offenbar ist 0 eine untere Schranke für diese Menge, weil keine Funktionswerte kleiner als 0 auftreten. Weil andererseits die irrationalen Zahlen in $\mathbb{R}$ dicht liegen, enthält auch das Intervall $[x_{k-1}, x_k]$ eine irrationale Zahl x, so dass $f(x) = 0$ in der Menge enthalten ist. Es kann also keine größere untere Schranke als 0 geben. Daraus folgt

$$\mathcal{S}^-_f(\mathcal{Z}) \quad = \quad \sum_{k=1}^{n} c^-_{k,f}(x_k - x_{k-1}) \quad = \quad \sum_{k=1}^{n} 0 \cdot (x_k - x_{k-1}) \quad = \quad 0$$

und insbesondere $\mathcal{S}^-_f(\mathcal{Z}) \le 0$. Andererseits gilt $c^+_{k,f} = \sup\{f(x) \mid x \in [x_{k-1}, x_k]\} = x_k$ für $1 \le k \le n$. Ist nämlich $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ beliebig vorgegeben, dann enthält das Intervall $]x_k - \varepsilon, x_k[$ eine rationale Zahl x, weil auch die rationalen Zahlen in $\mathbb{R}$ dicht liegen. Wegen $f(x) = x > x_k - \varepsilon$, und weil ε beliebig klein gewählt werden kann, besitzt die Menge $\{f(x) \mid x \in [x_{k-1}, x_k]\}$ keine kleinere obere Schranke als x_k. Andererseits ist x_k wegen $f(x) = x \le x_k$ für alle $x \in [x_{k-1}, x_k]$ eine obere Schranke der Menge. Damit ist $\sup\{f(x) \mid x \in [x_{k-1}, x_k]\} = x_k$ nachgewiesen. Es folgt nun

$$\begin{aligned}
\mathcal{S}^+_f(\mathcal{Z}) \quad &= \quad \sum_{k=1}^{n} c^+_{k,f}(x_k - x_{k-1}) \quad = \quad \sum_{k=1}^{n} x_k(x_k - x_{k-1}) \quad \ge \quad \sum_{k=1}^{n} \tfrac{1}{2}(x_{k-1} + x_k)(x_k - x_{k-1}) \\
&= \quad \sum_{k=1}^{n} \tfrac{1}{2}(x_k^2 - x_{k-1}^2) \quad = \quad \tfrac{1}{2}x_n^2 - \tfrac{1}{2}x_0^2 \quad = \quad \tfrac{1}{2} \cdot 1^2 - \tfrac{1}{2} \cdot 0^2 \quad = \quad \tfrac{1}{2}.
\end{aligned}$$

zu (b) Das Unterintegral $\int_{0\star}^{1} f(x)\, dx$ ist nach Definition das Supremum über alle Untersummen. Weil nach Teil (a) die Zahl 0 eine obere Schranke für die Menge aller Untersummen ist, folgt $\int_{0\star}^{1} f(x)\, dx \le 0$. Andererseits ist das Oberintegral das Infimum über alle Obersummen, und weil $\frac{1}{2}$ eine untere Schranke für die Obersummen ist, folgt $\int_{0}^{1\star} f(x)\, dx \ge \frac{1}{2}$. Unter- und Oberintegral können somit nicht übereinstimmen, und folglich ist f nicht Riemann-integrierbar.