Analysis mehrerer Variablen (LA Gym)

— **Lösung Blatt 12** —

(Globalübungsblatt)

Aufgabe 1

Die partiellen Ableitungen von f bis zum Grad 3 sind gegeben durch

$$\partial_1 f(x,y) = y \cdot \frac{1}{xy} = \frac{1}{x} \quad , \quad \partial_2 f(x,y) = x \cdot \frac{1}{xy} = \frac{1}{y}$$
$$\partial_{11} f(x,y) = -\frac{1}{x^2} \quad , \quad \partial_{12} f(x,y) = 0 = \partial_{21} f(x,y) \quad , \quad \partial_{22} f(x,y) = -\frac{1}{y^2}$$
$$\partial_{111} f(x,y) = \frac{2}{x^3} \quad , \quad \partial_{222} f(x,y) = \frac{2}{y^3} \quad ,$$

alle übrigen dreifachen partiellen Ableitungen $\partial_{ijk} f(x,y)$ mit $i,j,k \in \{1,2\}$ sind gleich Null. Die Werte der partiellen Ableitungen an der Stelle $(1,1)$ sind

$$\partial_1 f(x,y) = 1 \quad , \quad \partial_2 f(x,y) = 1$$
$$\partial_{11} f(x,y) = -1 \quad , \quad \partial_{12} f(x,y) = 0 = \partial_{21} f(x,y) \quad , \quad \partial_{21} f(x,y) = -1$$
$$\partial_{111} f(x,y) = 2 \quad , \quad \partial_{222} f(x,y) = 2.$$

Für die erste Ableitung gilt $f'(1,1) = (\partial_1 f(1,1) \ \ \partial_2 f(1,1)) = (1 \ \ 1)$. Das erste Taylorpolynom ist somit gegeben durch

$$\tau_1(f,(1,1))(x,y) \quad = \quad f(1,1) + f'(1,1)((x-1,y-1)) \quad = \quad 0 + \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x-1 \\ y-1 \end{pmatrix} \quad = \quad x + y - 2.$$

Die Hesse-Matrix an der Stelle $(1,1)$ ist gegeben durch

$$\mathcal{H}(f,(1,1))(x,y) \quad = \quad \begin{pmatrix} \partial_{11} f(1,1) & \partial_{12} f(1,1) \\ \partial_{21} f(1,1) & \partial_{22} f(1,1) \end{pmatrix} \quad = \quad \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad ,$$

und somit erhalten wir für das zweite Taylorpolynom

$$\tau_2(f,(1,1))(x,y) \quad = \quad f(1,1) + f'(1,1)((x-1,y-1)) + \tfrac{1}{2} f''(1,1)((x-1,y-1),(x-1,y-1))$$
$$= \quad f(1,1) + f'(1,1)((x-1,y-1)) + \tfrac{1}{2} \begin{pmatrix} x-1 & y-1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x-1 \\ y-1 \end{pmatrix}$$
$$= \quad x + y - 2 + \tfrac{1}{2} \begin{pmatrix} x-1 & y-1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x-1 \\ y-1 \end{pmatrix} \quad = \quad x + y - 2 - \tfrac{1}{2}(x-1)^2 - \tfrac{1}{2}(y-1)^2$$
$$= \quad x + y - 2 - \tfrac{1}{2}(x^2 - 2x + 1) - \tfrac{1}{2}(y^2 - 2y + 1) \quad = \quad -\tfrac{1}{2}x^2 + 2x - \tfrac{1}{2}y^2 + 2y - 3.$$

Für das dritte Taylorpolynom berechnen wir zunächst

$$f'''(1,1)((x-1,y-1),(x-1,y-1),(x-1,y-1)) \quad =$$
$$\partial_{111} f(1,1) \cdot (x-1)^3 + \partial_{222} f(1,1) \cdot (y-1)^3 \quad = \quad 2(x-1)^3 + 2(y-1)^3.$$

Wir erhalten

$$\begin{aligned}\tau_3(f,(1,1)) \quad &= \quad f(1,1)+f'(1,1)((x-1,y-1))+\tfrac{1}{2}f''(1,1)((x-1,y-1),(x-1,y-1)) \\ &\quad +\tfrac{1}{6}f'''(1,1)((x-1,y-1),(x-1,y-1),(x-1,y-1)) \quad = \\ \left(-\tfrac{1}{2}x^2+2x-\tfrac{1}{2}y^2+2y-3\right)+\tfrac{1}{3}(x-1)^3+\tfrac{1}{3}(y-1)^3 \quad &= \quad \tfrac{1}{3}x^3-\tfrac{3}{2}x^2+3x+\tfrac{1}{3}y^3-\tfrac{3}{2}y^2+3y-\tfrac{11}{3}.\end{aligned}$$

Aufgabe 2

zu (a) Die partiellen Ableitungen von f sind gegeben durch $\partial_1 f(x,y)=2xy^2$, $\partial_2 f(x,y)=2(1+x^2)y$, die zweifachen partiellen Ableitungen durch $\partial_{11}f(x,y)=2y^2$, $\partial_{12}f(x,y)=\partial_{21}f(x,y)=4xy$, $\partial_{22}f(x,y)=2(1+x^2)$. Ist $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ ein kritischer Punkt von f, dann muss nach Definition $\partial_1 f(x,y)=0$ und $\partial_2 f(x,y)=0$ gelten. Die zweite Gleichung liefert $2(1+x^2)y=0$ und wegen $1+x^2>0$ somit $y=0$. Dies zeigt, dass die Menge der kritischen Punkte von f in der Menge $M=\{(x,0)\mid x\in\mathbb{R}\}$ enthalten ist. Umgekehrt überprüft man leicht $\partial_1 f(x,0)=\partial_2 f(x,0)=0$ für alle $x\in\mathbb{R}$, so dass M die genaue Menge der kritischen Punkte ist.

Für alle $x\in\mathbb{R}$ ist die Hesse-Matrix an der Stelle $(x,0)$ jeweils gegeben durch

$$\mathcal{H}(f)((x,0)) \quad = \quad \begin{pmatrix}\partial_{11}f(x,0) & \partial_{12}f(x,0)\\ \partial_{21}f(x,0) & \partial_{22}f(x,0)\end{pmatrix} \quad = \quad \begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 2(1+x^2)\end{pmatrix}.$$

Für kein $x\in\mathbb{R}$ ist diese Matrix negativ semidefinit, denn es gilt jeweils ${}^{\mathrm{t}}e_2\mathcal{H}(f)((x,0))e_2=2(1+x^2)>0$. Nach Satz (12.12)(ii) besitzt f deshalb nirgends ein lokales Maximum. Andererseits gilt für alle $x_0\in\mathbb{R}$ und alle $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ jeweils $f(x,y)=y^2(1+x^2)\geq 0=f(x_0,0)$. Dies zeigt, dass f in $(x_0,0)$ jeweils ein lokales (sogar ein globales) Minimum besitzt. Allerdings ist keines dieser lokalen Minima isoliert. Wäre $(x_0,0)$ mit $x_0\in\mathbb{R}$ ein isoliertes lokales Minimum, dann müsste ein $\varepsilon\in\mathbb{R}^+$ existieren, so dass $f(x,y)>f(x_0,0)$ für alle $(x,y)\in B_\varepsilon((x_0,0))$ erfüllt ist, wobei $B_\varepsilon((x_0,0))$ den offenen Ball vom Radius ε bezüglich der Maximumsnorm $\|\cdot\|_\infty$ bezeichnet. Es gilt aber bespielsweise $(x_0+\frac{1}{2}\varepsilon,0)\in B_\varepsilon((x_0,0))$ wegen $\|(x_0+\frac{1}{2}\varepsilon,0)-(x_0,0)\|_\infty=\|(0,\frac{1}{2}\varepsilon)\|_\infty=\frac{1}{2}\varepsilon<\varepsilon$ und $f(x_0+\frac{1}{2}\varepsilon,0)=0=f(x_0,0)$.

zu (b) Zunächst bestimmen wir die kritischen Punkte der Funktion f. Die partiellen Ableitungen von f sind

$$\partial_1 f(x,y)=e^x+xe^x-e^x\cos(y)=e^x(1+x-\cos(y)) \qquad \text{und} \qquad \partial_2 f(x,y)=(1+e^x)\sin(y).$$

Die erste Ableitung in einem beliebigen Punkt $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ ist also gegeben durch

$$f'(x,y) \quad = \quad (e^x(1+x-\cos(y)) \ \ (1+e^x)\sin(y)).$$

Ist $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ ein kritischer Punkt, dann gilt also $e^x(1+x-\cos(y)=0$ und $(1+e^x)\sin(y)=0$. Weil $1+e^x$ für kein $x\in\mathbb{R}$ den Wert Null annimmt, folgt aus der zweiten Gleichung $\sin(y)=0$, also $y\in\{k\pi\mid k\in\mathbb{Z}\}$. Je nachdem, ob $k\in\mathbb{Z}$ gerade oder ungerade ist, gilt $\cos(y)=1$ oder $\cos(y)=-1$.

Betrachten wir zunächst den Fall, dass $y=k\pi$ mit geradem $k\in\mathbb{Z}$ gilt. Aus $\partial_1 f(x,y)=e^x(1+x-\cos(y))$ folgt wegen $e^x\neq 0$ dann

$$1+x-\cos(y)=0 \quad\Leftrightarrow\quad 1+x-1=0 \quad\Leftrightarrow\quad x=0.$$

In diesem Fall ist (x, y) also ein Element der Menge $A = \{(0, k\pi) \mid k \in \mathbb{Z} \text{ gerade }\}$. Nehmen wir nun an, dass $y = k\pi$ mit ungeradem $k \in \mathbb{Z}$ gilt. Wegen $e^x(1 + y - \cos(y)) = 0$ und $e^x \neq 0$ erhalten wir in diesem Fall

$$1 + x - \cos(y) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 1 + x + 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = -2$$

und somit $(x, y) \in B$ für $B = \{(-2, k\pi) \mid k \in \mathbb{Z} \text{ ungerade }\}$. Insgesamt haben wir damit gezeigt: Ist $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ ein kritischer Punkt von f, dann gilt $(x, y) \in A \cup B$. Umgekehrt sieht man durch Einsetzen unmittelbar, dass $\partial_1 f(0, k\pi) = \partial_2 f(0, k\pi)$ für alle ungeraden $k \in \mathbb{Z}$ und $\partial_1 f(-2, k\pi) = \partial_2 f(-2, k\pi)$ für alle geraden $k \in \mathbb{Z}$ gilt. Somit ist jedes Element aus $A \cup B$ ein kritischer Punkt von f. Also ist $A \cup B$ genau die Menge der kritischen Punkte von f.

Um unendlich viele lokale Minima zu finden, betrachten wir nun die Hesse-Matrix von f in diesen Punkten. Die zweifachen partiellen Ableitungen von f sind gegeben durch

$$\partial_{11} f(x, y) = e^x(1 + x - \cos(y)) + e^x = e^x(2 + x - \cos(y)) \quad ,$$
$$\partial_{12} f(x, y) = \partial_{21} f(x, y) = e^x \sin(y) \quad , \quad \partial_{22} f(x, y) = (1 + e^x)\cos(y).$$

Für $(0, k\pi) \in A$ mit $k \in \mathbb{Z}$ gerade erhalten wir

$$\mathcal{H}(f)((0, k\pi)) \quad = \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Diese Matrix ist nach dem Hurwitz-Kriterium positiv definit, denn es ist $\det(1) = 1 > 0$ und $\det \mathcal{H}(f)((0, k\pi)) = 2 > 0$. Also ist jeder der Punkte $(0, k\pi)$ nach Satz (12.11) (i) ein isoliertes lokales Minimum.

Um auszuschließen, dass es auch lokale Maxima gibt, sehen wir uns die Hesse-Matrix von f in den Punkten $(-2, k\pi) \in B$ mit $k \in \mathbb{Z}$ ungerade an. Hier gilt

$$\mathcal{H}(f)((-2, k\pi)) \quad = \quad \begin{pmatrix} e^{-2} & 0 \\ 0 & -(1 + e^{-2}) \end{pmatrix}.$$

Diese Matrix ist indefinit, denn es gilt

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-2} & 0 \\ 0 & -(1 + e^{-2}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = e^{-2} > 0 \qquad \text{und} \qquad \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-2} & 0 \\ 0 & -(1 + e^{-2}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = -(1+e^{-2}) < 0.$$

Nach Satz (12.11) (iii) liegt in diesen Punkten also kein Extremum, insbesondere kein lokales Maximum vor. Auch in den Punkte $(0, k\pi) \in A$ mit $k \in \mathbb{Z}$ gerade gibt es kein lokales Maximum, denn ein *isoliertes* lokales Minimum kann nicht zugleich lokales Maximum sein. Weil jedes Extremum nach Satz (12.9) in der Menge $A \cup B$ der kritischen Punkte enthalten sein muss, ist somit gezeigt, dass f im gesamten Definitionsbereich kein lokales Maximum besitzt.

Aufgabe 3

zu (a) Ist $f \in \mathbb{R}[x]$ ein normiertes Polynom vom Grad 3, $f = x^3 + px^2 + qx + r$ mit $p, q, r \in \mathbb{R}$, das (eventuell mit Vielfachheiten) die reellen Nullstellen α, β, γ besitzt, dann gilt

$$x^3 + px^2 + qx + r \quad = \quad f \quad = \quad (x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma) \quad = \quad (x^2 - (\alpha+\beta)x + \alpha\beta)(x-\gamma) \quad = \\ x^3 - (\alpha+\beta+\gamma)x^2 + (\alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma)x - \alpha\beta\gamma.$$

Die gesuchte Abbildung $\phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ ist also die Funktion mit den Komponenten $\phi_1(\alpha, \beta, \gamma) = -(\alpha + \beta + \gamma)$, $\phi_2(\alpha, \beta, \gamma) = \alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma$, $\phi_3(\alpha\beta\gamma) = -\alpha\beta\gamma$. Die Ableitung dieser Funktion ist gegeben durch

$$\phi'(\alpha, \beta, \gamma) \quad = \quad \begin{pmatrix} \partial_1\phi_1(\alpha,\beta,\gamma) & \partial_2\phi_1(\alpha,\beta,\gamma) & \partial_3\phi_1(\alpha,\beta,\gamma) \\ \partial_1\phi_2(\alpha,\beta,\gamma) & \partial_2\phi_2(\alpha,\beta,\gamma) & \partial_3\phi_2(\alpha,\beta,\gamma) \\ \partial_1\phi_3(\alpha,\beta,\gamma) & \partial_2\phi_3(\alpha,\beta,\gamma) & \partial_3\phi_3(\alpha,\beta,\gamma) \end{pmatrix} \quad = \quad \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ \beta+\gamma & \alpha+\gamma & \alpha+\beta \\ -\beta\gamma & -\alpha\gamma & -\alpha\beta \end{pmatrix}.$$

zu (b) Sei $f = x^3 + px^2 + qx + r \in \mathbb{R}[x]$ ein Polynom mit drei verschiedenen reellen Nullstellen α, β, γ. Dann gilt also $\phi(\alpha, \beta, \gamma) = (p, q, r)$ nach Definition von ϕ. Wir berechnen die Determinante von $\phi'(\alpha, \beta, \gamma)$ mit Hilfe der Sarrus-Regel. Es gilt

$$\det \phi'(\alpha,\beta,\gamma) \quad = \quad \det \begin{pmatrix} \partial_1\phi_1(\alpha,\beta,\gamma) & \partial_2\phi_1(\alpha,\beta,\gamma) & \partial_3\phi_1(\alpha,\beta,\gamma) \\ \partial_1\phi_2(\alpha,\beta,\gamma) & \partial_2\phi_2(\alpha,\beta,\gamma) & \partial_3\phi_2(\alpha,\beta,\gamma) \\ \partial_1\phi_3(\alpha,\beta,\gamma) & \partial_2\phi_3(\alpha,\beta,\gamma) & \partial_3\phi_3(\alpha,\beta,\gamma) \end{pmatrix} \quad = \quad \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ \beta+\gamma & \alpha+\gamma & \alpha+\beta \\ -\beta\gamma & -\alpha\gamma & -\alpha\beta \end{pmatrix}$$

$$= \quad \alpha\beta(\alpha+\gamma) + \beta\gamma(\alpha+\beta) + \alpha\gamma(\beta+\gamma) - \beta\gamma(\alpha+\gamma) - \alpha\gamma(\alpha+\beta) - \alpha\beta(\beta+\gamma)$$

$$= \quad \alpha\beta((\alpha+\gamma) - (\beta+\gamma)) + \beta\gamma((\alpha+\beta) - (\alpha+\gamma)) + \alpha\gamma((\beta+\gamma) - (\alpha+\beta))$$

$$= \quad \alpha\beta(\alpha-\beta) + \beta\gamma(\beta-\gamma) + \alpha\gamma(\gamma-\alpha) \quad = \quad (\beta-\alpha)(\gamma-\beta)(\alpha-\gamma).$$

Weil α, β, γ verschieden sind, gilt $\det \phi'(\alpha, \beta, \gamma) = 2(\beta - \alpha)(\gamma - \beta)(\alpha - \gamma) \neq 0$, also ist $\phi'(\alpha, \beta, \gamma)$ invertierbar. Auf Grund des Satzes (10.3) über die lokale Umkehrbarkeit gibt es also offene Umgebungen U von (p, q, r) und V von (α, β, γ), so dass ϕ ein $\mathcal{C}^1$-Diffeomorphismus $V \to U$ ist. Sei $\psi : U \to V$ die Umkehrabbildung von ϕ; dann ist ψ ebenfalls ein $\mathcal{C}^1$-Diffeomorphismus.

Sei nun $(p_1, q_1, r_1) \in U$ vorgegeben und $(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1) = \psi(p_1, q_1, r_1)$. Dann gilt $\phi(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1) = (p_1, q_1, r_1)$ nach Definition der Umkehrabbildung. Nach Definition von ϕ ist $x^3 + p_1x^2 + q_1x + r_1 \in \mathbb{R}[x]$ das normierte Polynom mit den Nullstellen $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$. Die drei Komponenten von $(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1) = \psi(p_1, q_1, r_1)$ sind also tatsächlich die Nullstellen des normierten Polynoms mit den Koeffizienten p_1, q_1, r_1, wie gewünscht.

zu (c) Sei $f = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$. Durch Ausprobieren findet man die Nullstelle $\alpha = 1$, und Polynomdivision liefert $f = (x-1)(x^2 - 5x + 6)$. Mit der p-q-Formel erhält man die beiden weiteren Nullstellen 2 und 3. Weil -6, 11 und -6 die Koeffizienten von f sind, gilt also $\phi(1, 2, 3) = (-6, 11, -6)$ nach Definition von ϕ. Sei $\psi : U \to V$ eine Funktion wie in Teil (b), mit $\psi(-6, 11, 6) = (1, 2, 3)$. Auf Grund der Umkehrregel, Satz (11.16), und der Formel für $\phi'(\alpha, \beta, \gamma)$ aus Teil (a) gilt

$$\psi'(-6, 11, -6) \quad = \quad \phi'(1, 2, 3)^{-1} \quad = \quad \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 5 & 4 & 3 \\ -6 & -3 & -2 \end{pmatrix}^{-1} \quad = \quad \tfrac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 8 & 4 & 2 \\ -9 & -3 & -1 \end{pmatrix}.$$

Anmerkung:
Wie bei der Tutoriumsaufgabe lässt sich auch hier die Lösung unabhängig überprüfen, und zwar mit Hilfe der expliziten Lösungsformeln für kubische Gleichungen. Gegeben sei ein Polynom $f = x^3 + px^2 + qx + r$ mit drei reellen Nullstellen. Definiert man die Hilfsausdrücke $a = q - \frac{1}{3}p^2$ und $b = \frac{2}{27}p^3 - \frac{1}{3}pq + r$, so erhält man die drei reellen Nullstellen durch die Formeln

$$\begin{aligned}
\alpha &= -\frac{2}{\sqrt{3}}\sqrt{-a}\sin\left(\tfrac{1}{3}\arcsin\left(\frac{3\sqrt{3}b}{2(\sqrt{-a})^3}\right) + \tfrac{1}{3}\pi\right) - \tfrac{1}{3}p \\
\beta &= \frac{2}{\sqrt{3}}\sqrt{-a}\sin\left(\tfrac{1}{3}\arcsin\left(\frac{3\sqrt{3}b}{2(\sqrt{-a})^3}\right)\right) - \tfrac{1}{3}p \\
\gamma &= \frac{2}{\sqrt{3}}\sqrt{-a}\cos\left(\tfrac{1}{3}\arcsin\left(\frac{3\sqrt{3}b}{2(\sqrt{-a})^3}\right) + \tfrac{1}{6}\pi\right) - \tfrac{1}{3}p.
\end{aligned}$$

Setzt man in diese Ausdrücke $p = -6$, $q = 11$, $r = -6$ ein, so erhält man tatsächlich die Nullstellen $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 3$ des Polynoms $x^3 - 6x^2 + 11x - 6$. Bildet man die partiellen Ableitungen von x_1 nach p, q und r (was von Hand sehr mühsam ist, aber zum Beispiel mit dem Computeralgebrasystem MAPLE durchgeführt werden kann), so erhält man die Werte

$$\frac{\partial x_1}{\partial p}(-6,11,-6) = \frac{\partial x_1}{\partial q}(-6,11,-6) = \frac{\partial x_1}{\partial r}(-6,11,-6) = -\tfrac{1}{2}.$$

Ebenso erhält man

$$\frac{\partial x_2}{\partial p}(-6,11,-6) = 4 \quad , \quad \frac{\partial x_2}{\partial q}(-6,11,-6) = 2 \quad , \quad \frac{\partial x_2}{\partial r}(-6,11,-6) = 1$$

und ebenso

$$\frac{\partial x_3}{\partial p}(-6,11,-6) = -\tfrac{9}{2} \quad , \quad \frac{\partial x_3}{\partial q}(-6,11,-6) = -\tfrac{3}{2} \quad , \quad \frac{\partial x_3}{\partial r}(-6,11,-6) = -\tfrac{1}{2}$$

Damit haben wir die drei Zeilen der Matrix $\psi'(-6,11,-6)$ reproduziert.