Analysis mehrerer Variablen

— Lösung Blatt 11 —

(Tutoriumsblatt)

Aufgabe 0

zu (a) Bei der Anwendung werden die folgenden beiden Matrizen multipliziert:

$$g'(f(a)) \quad = \quad \begin{pmatrix} \partial_1 g_1(f(a)) & \cdots & \partial_n g_1(f(a)) \\ \vdots & & \vdots \\ \partial_1 g_p(f(a)) & \cdots & \partial_n g_p(f(a)) \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{p\times n,\mathbb{R}} \qquad \text{und} \qquad \begin{pmatrix} \partial_1 f_1(a) & \cdots & \partial_m f_1(a) \\ \vdots & & \vdots \\ \partial_1 f_n(a) & \cdots & \partial_m f_n(a) \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n\times m,\mathbb{R}}$$

zu (b) Die Produktregel für zwei differenzierbare Funktionen $f, g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ lautet $(fg)'(x) = f(x)g'(x) + g(x)f'(x)$. Die Beschränkung auf reellwertige Funktionen war notwendig, damit das Produkt $(fg)(x) = f(x)g(x)$ überhaupt definiert ist. (Es gibt keine allgemeine Vorschrift zur Multiplikation zweier Vektoren.)

zu (c) Nach Definition gilt $h(x) = \sum_{i=1}^{n} f_i(x)g_i(x)$, und auf Grund der Produktregel gilt $(f_i g_i)'(x) = f_i(x)g_i'(x) + g_i(x)f_i'(x)$ für $1 \le i \le n$, für jedes $x \in \mathbb{R}^m$ Daraus folgt für alle $x, v \in \mathbb{R}^m$ jeweils

$$h'(x)(v) \quad = \quad \sum_{i=1}^{n} (f_i(x)g_i'(x)(v) + g_i(x)f_i'(x)(v)) \quad = \quad \langle f(x), g'(x)(v)\rangle + \langle g(x), f'(x)(v)\rangle.$$

zu (d) Die zweite Ableitung $f''(a)$ ist eine Bilinearform $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Die Hesse-Matrix ist die Darstellungsmatrix dieser Bilinearform bezüglich der Einheitsbasis, der Eintrag a_{ij} von $A = \mathcal{H}(f)(a)$ ist also gegeben durch $a_{ij} = f''(a)(e_i, e_j)$, für $1 \le i, j \le n$. Nach Proposition (12.5) sind die Einträge von $\mathcal{H}(f)(a)$ zugleich die zweifachen partiellen Ableitungen, es gilt jeweils $a_{ij} = \partial_{ij} f(a)$.

Aufgabe 1

zu (a) Laut Vorlesung sind die Einträge der Darstellungsmatrix der Bilinearform $f''(x, y)$ bezüglich $\mathcal{E}$, also die Hesse-Matrix, die zweifachen partiellen Ableitungen von f. Die einfachen partiellen Ableitungen sind gegeben durch $\partial_1 f(x, y) = 2xy$ und $\partial_2 f(x, y) = x^2$, und damit erhalten wir $\partial_{11} f(x, y) = 2y$, $\partial_{12} f(x, y) = 2x$, $\partial_{21} f(x, y) = 2x$, $\partial_{22} f(x, y) = 0$. Die gesuchte Matrix ist also gegeben durch

$$\mathcal{H}(f)(x, y) \quad = \quad \begin{pmatrix} 2y & 2x \\ 2x & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{für alle} \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

zu (b) Durch Anwendung von Prop. (9.5) erhalten wir

$$\begin{aligned} f''(x, y)(v, v) &= v_1 v_1 \partial_{11} f(x, y) + v_1 v_2 \partial_{12} f(x, y) + v_2 v_1 \partial_{21} f(x, y) + v_2 v_2 \partial_{22} f(x, y) \\ &= (-1)^2 2y + (-1) \cdot 0 \cdot 2x + 0 \cdot (-1) \cdot 2x + 0^2 0 = 2y \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f''(x, y)(v, w) &= v_1 w_1 \partial_{11} f(x, y) + v_1 w_2 \partial_{12} f(x, y) + v_2 w_1 \partial_{21} f(x, y) + v_2 w_2 \partial_{22} f(x, y) \\ &= (-1) \cdot 1 \cdot 2y + (-1) \cdot (-1) \cdot 2x + 0 \cdot 1 \cdot 2x + 0 \cdot (-1) \cdot 0 = 2x - 2y \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f''(x, y)(w, v) &= w_1 v_1 \partial_{11} f(x, y) + w_1 v_2 \partial_{12} f(x, y) + w_2 v_1 \partial_{21} f(x, y) + w_2 v_2 \partial_{22} f(x, y) \\ &= 1 \cdot (-1) \cdot 2y + 1 \cdot 0 \cdot 2x + (-1) \cdot (-1) \cdot 2x + (-1) \cdot 0 \cdot 0 = 2x - 2y \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f''(x, y)(w, w) &= w_1 w_1 \partial_{11} f(x, y) + w_1 w_2 \partial_{12} f(x, y) + w_2 w_1 \partial_{21} f(x, y) + w_2 w_2 \partial_{22} f(x, y) \\ &= 1^2 \cdot 2y + 1 \cdot (-1) \cdot 2x + (-1) \cdot 1 \cdot 2x + (-1)^2 \cdot 0 = 2y - 4x \end{aligned}$$

Die gesuchte Darstellungsmatrix ist somit

$$\begin{pmatrix} 2y & 2x-2y \\ 2x-2y & 2y-4x \end{pmatrix}$$

zu (c) Die Vektoren $2v-3w$ und $4v+5w$ haben bezüglich $\mathcal{B}$ die Koordinatenvektoren $(2,-3)$ und $(4,5)$. Wir erhalten somit

$$f''(1,1)(2v-3w, 4v+5w) \quad = \quad \begin{pmatrix} 2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix} \quad = \quad \begin{pmatrix} 4 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix} \quad = \quad 46.$$

Aufgabe 2

Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ die Funktion mit den beiden Komponenten f_1 und f_2. Nach Prop. (8.3) gilt dann $f'(t) = (f_1'(t), f_2'(t))$ für alle $t \in \mathbb{R}$. Die Ableitung der Funktion F ist gegeben durch

$$F'(x,y) \quad = \quad \begin{pmatrix} \partial_1 F(x,y) & \partial_2 F(x,y) \end{pmatrix} \quad = \quad \begin{pmatrix} \frac{1}{y} & -\frac{x}{y^2} \end{pmatrix}$$

Die Funktion $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $t \mapsto \frac{f_1(t)}{f_2(t)}$ erfüllt die Gleichung $g = F \circ f$, denn für alle $t \in \mathbb{R}$ gilt $(F \circ f)(t) = F(f_1(t), f_2(t)) = \frac{f_1(t)}{f_2(t)}$. Durch Anwendung der mehrdimensionalen Kettenregel, Satz (8.13), erhalten wir nun

$$g'(t) \quad = \quad (F \circ f)'(t) \quad = \quad F'(f(t)) \cdot f'(t) \quad = \quad \begin{pmatrix} \frac{1}{f_2(t)} & -\frac{f_1(t)}{f_2(t)^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_1'(t) \\ f_2'(t) \end{pmatrix}$$

$$= \quad \frac{1}{f_2(t)} \cdot f_1'(t) - \frac{f_1(t)}{f_2(t)^2} \cdot f_2'(t) \quad = \quad \frac{f_1'(t) f_2(t) - f_1(t) f_2'(t)}{f_2(t)^2}$$

für alle $t \in \mathbb{R}$.

Aufgabe 3

Für alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ und $(u,v) \in \mathbb{R}^2$ gilt die Äquivalenz

$$(u,v) = (ye^{-x}, 2x) \quad \Leftrightarrow \quad u = ye^{-x} \ \wedge \ v = 2x \quad \Leftrightarrow \quad x = \tfrac{1}{2}v \ \wedge \ u = ye^{-\frac{1}{2}v} \quad \Leftrightarrow \quad x = \tfrac{1}{2}v \ \wedge \ y = ue^{\frac{1}{2}v}.$$

Definieren wir also $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ durch $g(u,v) = (\frac{1}{2}v, ue^{\frac{1}{2}v})$ für alle $(u,v) \in \mathbb{R}^2$, dann gilt $(u,v) = f(x,y) \Leftrightarrow (x,y) = g(u,v)$ für alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ und $(u,v) \in \mathbb{R}^2$. Dies zeigt, dass g eine Umkehrfunktion von f und f somit eine bijektive Abbildung ist.

Wir überprüfen nun die Voraussetzungen der Umkehrregel. Auf Grund der Bijektivität von f gilt $f(\mathbb{R}^2) = \mathbb{R}^2$, und dies ist offenbar eine offene Teilmenge von $\mathbb{R}^2$. Die Funktion g ist in jedem Punkt von $\mathbb{R}^2$ stetig, denn die Komponentenfunktionen $(u,v) \mapsto \frac{1}{2}v$ und $(u,v) \mapsto e^{\frac{1}{2}v}$ sind aus stetigen Funktionen zusammengesetzt. Die Jacobi-Matrix von f in einem beliebigen Punkt $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ ist gegeben durch

$$f'(x,y) \quad = \quad \begin{pmatrix} -ye^{-x} & e^{-x} \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

und es gilt jeweils $\det f'(x,y) = -ye^{-x} \cdot 0 - e^{-x} \cdot 2 = -2e^{-x} \neq 0$.

Damit sind alle Voraussetzungen der Umkehrregel erfüllt. Ist $(u,v) \in \mathbb{R}^2$ vorgegeben und $(x,y) = g(u,v) = (\frac{1}{2}v, ue^{\frac{1}{2}v})$, dann gilt also

$$g'(u,v) \quad = \quad f'(x,y)^{-1} \quad = \quad \begin{pmatrix} -ye^{-x} & e^{-x} \\ 2 & 0 \end{pmatrix}^{-1} \quad = \quad \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ e^x & \frac{1}{2}y \end{pmatrix} \quad = \quad \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ e^{\frac{1}{2}v} & \frac{1}{2}ue^{\frac{1}{2}v} \end{pmatrix}.$$

Dasselbe Ergebnis erhält man natürlich auch, wenn man die Ableitung von g direkt berechnet.