$(4x^2+2)(z+5)e^{x^2+y^2}$

Blatt 11

Aufgabe 1 $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $(x,y,z) \mapsto (z+5)e^{x^2+y^2}$

zu (a) gesucht: Darstellungsmatrix von $f''(x,y,z)$ (= Bilinearform auf $\mathbb{R}^3$) bzgl. $\mathcal{E} = (e_1, e_2, e_3)$, für einen bel. Punkt $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$.

Sei $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$. bekannt: $\forall v, w \in \mathbb{R}^3$: $f''(x,y,z)(v,w)$ $= \partial_v \partial_w f(x,y,z)$ (2-fache Richtungsabl.)

insbesondere: $f''(x,y,z)(e_i, e_j) = \partial_{ij} f(x,y,z)$ für $1 \le i,j \le 3$. Dies sind die Einträge der Darstellungsmatrix $M_{\mathcal{E}}(f''(x,y,z))$

einfache partielle Ableitungen:

$$\partial_1 f(x,y,z) = 2x(z+5)\,e^{x^2+y^2}$$
$$\partial_2 f(x,y,z) = 2y(z+5)\,e^{x^2+y^2}$$
$$\partial_3 f(x,y,z) = e^{x^2+y^2}$$

2-fache partielle Ableitungen:

Die Fkt. ist offenbar bel. oft partiell diff'bar (da dies für die e-Funktion und Polynomfkt. gilt, und f aus solchen Fkt. zusammengesetzt ist). Insb. sind die 2-fachen partiellen Ableitungen stetig $\Rightarrow$ Satz von Schwarz anwendbar, d.h. $\partial_{ij} f = \partial_{ji} f$ für $1 \le i \le j \le 3$.

$$\partial_{11} f(x,y,z) = 2(z+5)\,e^{x^2+y^2} + 4x^2(z+5)\,e^{x^2+y^2}$$
$$= (4x^2+2)(z+5)\,e^{x^2+y^2}$$

$$\partial_{21} f(x,y,z) = 4xy(z+5)e^{x^2+y^2} = \partial_{12} f(x,y,z)$$

$$\partial_{31} f(x,y,z) = 2x\, e^{x^2+y^2} = \partial_{13} f(x,y,z)$$

$$\partial_{22} f(x,y,z) = 2(z+5)e^{x^2+y^2} + 4y^2(z+5)e^{x^2+y^2}$$

$$= (4y^2+2)(z+5)e^{x^2+y^2}$$

$$\partial_{32} f(x,y,z) = 2y\, e^{x^2+y^2} = \partial_{23} f(x,y,z)$$

$$\partial_{33} f(x,y,z) = 0$$

$$\Rightarrow M_{\mathcal{E}}(f''(x,y,z)) = e^{x^2+y^2} \begin{pmatrix} (4x^2+2)(z+5) & 4xy(z+5) & 2x \\ 4xy(z+5) & (4y^2+2)(z+5) & 2y \\ 2x & 2y & 0 \end{pmatrix}$$

<u>zu (b)</u> gesucht: $M_{\mathcal{B}}(f''(x,y,z))$ für $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$ bel.

$\mathcal{B} = (u,v,w)$, $u = e_1$, $v = e_1 - e_2$, $w = e_1 - e_2 + e_3$.

Transformationsformel für Bilinearformen:

$$M_{\mathcal{B}}(f''(x,y,z)) = {}^tT^{\mathcal{B}}_{\mathcal{E}}\, M_{\mathcal{E}}(f''(x,y,z))\, T^{\mathcal{B}}_{\mathcal{E}}$$

<u>hier</u>: $T^{\mathcal{B}}_{\mathcal{E}} = \begin{array}{c}\begin{pmatrix}1&1&1\\0&-1&-1\\0&0&1\end{pmatrix}\\ \begin{array}{ccc}u\;\;&v\;\;&\;\;\end{array}\end{array} \Longrightarrow$

$$M_{\mathcal{B}}(f''(x,y,z)) = e^{x^2+y^2}\begin{pmatrix}1&0&0\\1&-1&0\\1&-1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}(4x^2+2)(z+5) & 4xy(z+5) & 2x\\ 4xy(z+5) & (4y^2+2)(z+5) & 2y\\ 2x & 2y & 0\end{pmatrix}$$

$$\cdot\begin{pmatrix}1&1&1\\0&-1&-1\\0&0&1\end{pmatrix} = \dots \text{ (siehe schriftl. Lsg.)}$$ $\square$

mehrdim. Produktregel: geg. $f,g:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ diff'bar

$$(fg)'(x) = g(x)\underbrace{f'(x)}_{\in\, \mathcal{L}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R})} + f(x)g'(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$$

(Hier wurde eine Tafel versehentlich nicht fotographiert.)

Aufgabe 2

Um die Ableitung von F durch Anwendung der mehrdimensionalen Kettenregel berechnen zu können, stellen wir F als Komposition der Funktion $g : \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}$, $(x, y, z) \mapsto xy + xz + yz$ und der Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ gegeben durch $f(t) = (f_1(t), f_2(t), f_3(t))$ dar. Tatsächlich gilt für alle $t \in \mathbb{R}$ jeweils

$$\begin{aligned} (g \circ f)(t) &= g(f(t)) = g(f_1(t), f_2(t), f_3(t)) \\ &= f_1(t)f_2(t) + f_1(t)f_3(t) + f_2(t)f_3(t) = F(t) \quad , \end{aligned}$$

also $g \circ f = F$.

Kettenregel $\Rightarrow F'(t) = (g \circ f)'(t) = g'(f(t))\, f'(t)$

komponentenweise Ableitung $\Rightarrow f'(t) = \begin{pmatrix} f_1'(t) \\ f_2'(t) \\ f_3'(t) \end{pmatrix}$

$$g'(x,y,z) = \big(\partial_1 g(x,y,z) \quad \partial_2 g(x,y,z) \quad \partial_3 g(x,y,z)\big)$$

$$= (y+z \quad x+z \quad x+y)$$

$$g'(f(t)) = g'(f_1(t), f_2(t), f_3(t)) = \big(f_2(t)+f_3(t) \quad f_1(t)+f_3(t) \quad f_1(t)+f_2(t)\big)$$

einsetzen $\Rightarrow F'(t) = \big(f_2(t)+f_3(t) \quad f_1(t)+f_3(t) \quad f_1(t)+f_2(t)\big) \begin{pmatrix} f_1'(t) \\ f_2'(t) \\ f_3'(t) \end{pmatrix}$

$$= f_1'(t)\big(f_2(t)+f_3(t)\big) + f_2'(t)\big(f_1(t)+f_3(t)\big)$$

$$+ f_3'(t)\big(f_1(t)+f_2(t)\big)$$

Aufgabe 3

$U = \mathbb{R} \times]-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi[\times]0,\pi[$

$f : U \to \mathbb{R}^3$, $(x,y,z) \mapsto (e^x\cos(y), e^x\sin(y), \cos(z))$

z.zg:
- f ist Bijektion von U auf $V = \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R} \times]-1,1[$
- Umkehrabb. $g : V \to U$ diff'bar

außerdem: Berechnung von g' auf V

(1) Bestimmung der Umkehrfkt von g durch Auflösen eines Gleichungssystems

Sei $(x,y,z) \in U$ und $(u,v,w) \overset{(*)}{=} f(x,y,z)$.

Ziel: Auflösung von $(*)$ nach (x,y,z)

$(*) \Longrightarrow u = e^x\cos(y)$, $v = e^x\sin(y)$, $w = \cos(z)$

$\cos : [0,\pi] \to [-1,1] \rightsquigarrow \arccos : [-1,1] \to [0,\pi]$

$w = \cos(z) \Rightarrow \boxed{z = \arccos(w)}$ $\Big(z \in \,]0,\pi[\, \Rightarrow \cos(z) \in \,]-1,1[\, \Rightarrow$ arccos auf w anwendbar $\Big)$

$u = e^x \cos(y),\ v = e^x \sin(y) \Rightarrow u^2 + v^2 = e^{2x}\left(\cos(y)^2 + \sin(y)^2\right)$

$= e^{2x} \cdot 1 = e^{2x} \Rightarrow 2x = \ln(u^2+v^2) \rightarrow \boxed{x = \frac{1}{2}\ln(u^2+v^2)}$

$\Big($ ln ist anwendbar, da $u^2 + v^2 \neq 0$; denn ansonsten wäre $\cos(y) = \sin(y) = 0$ ↯ $\Big)$

$u = e^x \cos(y) \Rightarrow u = e^{\frac{1}{2}\ln(u^2+v^2)} \cos(y) = \cos(y)\sqrt{u^2+v^2}$

$\Rightarrow \cos(y) = \frac{u}{\sqrt{u^2+v^2}} \Rightarrow \boxed{y = \arccos\left(\frac{u}{\sqrt{u^2+v^2}}\right)}$

$\left(\left|\frac{u}{\sqrt{u^2+v^2}}\right| \leq 1 \Rightarrow \frac{u}{\sqrt{u^2+v^2}} \in [-1,1] \Rightarrow \right.$ arccos anwendbar $\Big)$

Korrekturanmerkung nächste Seite!

Bei der Berechnung von y wurde nicht beachtet, dass nach Definition des Definitionsbereichs von U der Wert y im Intervall $\left]-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\right[$ liegen muss. Der Arcus cosinus liefert aber einen Wert im Bereich $]0, \pi[$. Dieser Fehler führt dann auf der übernächsten Tafel (Seite 11, drittletzte Zeile) dazu, dass man nur die Gleichung $v' = |v|$, und nicht $v' = v$ herausbekommt.

richtige Vorgehensweise:
Man formt die Gleichung $v = e^x \sin(y)$ um, indem man zunächst für x den bereits gefundenen Wert $x = \frac{1}{2}\ln(u^2 + v^2)$ einsetzt und anschließend auf beide Seite den Arcus sinus anwendet:

$$v = e^x \sin(y) = \exp(\tfrac{1}{2}\ln(u^2 + v^2))\sin(y) = \sqrt{u^2 + v^2}\sin(y)$$

$$\Rightarrow \quad \sin(y) = \frac{v}{\sqrt{u^2 + v^2}} \quad \Rightarrow \quad y = \arcsin\left(\frac{v}{\sqrt{u^2 + v^2}}\right).$$

Die korrekte Umkehrfunktion ist also gegeben durch

$$g(u, v, w) \quad = \quad \left(\tfrac{1}{2}\ln(u^2 + v^2)\ ,\ \arcsin\left(\frac{v}{\sqrt{u^2 + v^2}}\right)\ ,\ \arccos(w)\right).$$

Bei der Überprüfung der Gleichung $f \circ g = \mathrm{id}_V$ erhält man dann das korrekte Resultat

$$\begin{aligned} v' \quad &= \quad \exp(\tfrac{1}{2}\ln(u^2 + v^2)) \cdot \sin\left(\arcsin\left(\frac{v}{\sqrt{u^2 + v^2}}\right)\right) \\ &= \quad \sqrt{u^2 + v^2} \cdot \frac{v}{\sqrt{u^2 + v^2}} \quad = \quad v \end{aligned}$$

an Stelle der fehlerhaften Gleichung $v' = |v|$.

(2) überprüfe: $g: V \to \mathbb{R}^3$, $(u,v,w) \mapsto \left(\frac{1}{2}\ln(u^2+v^2), \arccos\left(\frac{u}{\sqrt{u^2+v^2}}\right), \arccos(w)\right)$

ist Umkehrfkt. von f nachzurechnen: (i) $g \circ f = id_U$ (ii) $f \circ g = id_V$

<u>zu (i)</u> Sei $(x,y,z) \in U$. $(g \circ f)(x,y,z) = g(e^x\cos(y), e^x\sin(y), \cos(z))$

$= (x', y', z')$ mit $x' = \frac{1}{2}\ln\left((e^x\cos(y))^2 + (e^x\sin(y))^2\right) =$

$\frac{1}{2}\ln\left(e^{2x}(\cos(y)^2 + \sin(y)^2)\right) = \frac{1}{2}\ln(e^{2x} \cdot 1) = \frac{1}{2}\ln(e^{2x})$

$= \frac{1}{2}(2x) = x$

$y' = \arccos\left(\frac{e^x\cos(y)}{\sqrt{(e^x\cos(y))^2 + (e^x\sin(y))^2}}\right) = \arccos\left(\frac{e^x\cos(y)}{e^x \cdot 1}\right)$

$= \arccos(\cos(y)) = y$

$z' = \arccos(\cos(z)) = z$ $\Rightarrow (g \circ f)(x,y,z) = (x,y,z)$

zu (ii) Sei $(u,v,w) \in V$. $(f \circ g)(u,v,w) =$

$$f\left(\tfrac{1}{2}\ln(u^2+v^2), \arccos\left(\frac{u}{\sqrt{u^2+v^2}}\right), \arccos(w)\right) = (u', v', w')$$

mit $$u' = e^{\frac{1}{2}\ln(u^2+v^2)} \cdot \cos\left(\arccos\left(\frac{u}{\sqrt{u^2+v^2}}\right)\right) = \sqrt{u^2+v^2} \cdot \frac{u}{\sqrt{u^2+v^2}} = u$$

$$v' = e^{\frac{1}{2}\ln(u^2+v^2)} \sin\Bigg(\underbrace{\arccos\left(\frac{u}{\sqrt{u^2+v^2}}\right)}_{\in [0,\pi]}\Bigg) \underset{\uparrow\, \sin(..) \geq 0}{=} \sqrt{u^2+v^2} \cdot \sqrt{1-\cos\left(\arccos\left(\frac{u}{\sqrt{u^2+v^2}}\right)\right)^2} = \sqrt{u^2+v^2}\, \sqrt{1-\left(\frac{u}{\sqrt{u^2+v^2}}\right)^2} =$$

$$\sqrt{u^2+v^2} \cdot \sqrt{1-\frac{u^2}{u^2+v^2}} = \sqrt{u^2+v^2}\, \sqrt{\frac{u^2+v^2-u^2}{u^2+v^2}} = \sqrt{v^2} = |v| \overset{?}{=} v$$

$$w' = \cos(\arccos(w)) = w$$

insgesamt:

$$(f \circ g)(u,v,w) = (u', v', w') = (u, v, w)$$

$\ldots g)(u,v,w) = (u',v',w') = (u,v,w)$

(3) Anwendung der Umkehrregel:

(f und die Umkehrfkt. sind stetig diff'bar, da aus bel. oft diff'baren Fkt. zusammengesetzt $\Rightarrow$ Umkehrregel anwendbar, sofern $\det f'(x,y,z) \neq 0 \;\forall (x,y,z) \in U$)

Sei $(u,v,w) \in V$, $(x,y,z) = g(u,v,w)$ $(\Rightarrow f(x,y,z) = (u,v,w))$

$$\det f'(x,y,z) = \det \begin{pmatrix} e^x \cos(y) & e^x \sin(y) & 0 \\ -e^x \sin(y) & e^x \cos(y) & 0 \\ 0 & 0 & -\sin(z) \end{pmatrix} = e^{2x}(-\sin(z))$$

$\neq 0$ (da $\sin(z) \neq 0 \;\forall z \in]0,\pi[$)

$$\Rightarrow g'(u,v,w) = f'(x,y,z)^{-1} = \begin{pmatrix} e^{-x}\cos(y) & e^{-x}\sin(y) & 0 \\ -e^{x}\sin(y) & e^{x}\cos(y) & 0 \\ 0 & 0 & -\sin(z)^{-1} \end{pmatrix}$$

$$\overset{!!!}{=} \begin{pmatrix} \frac{u}{u^2+v^2} & \frac{v}{u^2+v^2} & 0 \\ -\frac{v}{u^2+v^2} & \frac{u}{u^2+v^2} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{\sqrt{1-w^2}} \end{pmatrix}$$