Analysis mehrerer Variablen (LA Gym)

— Lösung Blatt 11 —

(Globalübungsblatt)

Aufgabe 1

Die partiellen Ableitungen der Funktion f sind für alle $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ gegeben durch

$$\begin{aligned}
\partial_1 f(x,y,z) &= (z+5)2xe^{x^2+y^2} \\
\partial_2 f(x,y,z) &= (z+5)2ye^{x^2+y^2} \\
\partial_3 f(x,y,z) &= e^{x^2+y^2}
\end{aligned}$$

und für die höheren Ableitungen erhalten wir

$$\begin{aligned}
\partial_{11} f(x,y,z) &= (z+5)\cdot 2\cdot e^{x^2+y^2} + (z+5)(2x)^2 e^{x^2+y^2} = (z+5)(4x^2+2)e^{x^2+y^2} \\
\partial_{12} f(x,y,z) &= (z+5)(4xy)e^{x^2+y^2} \\
\partial_{13} f(x,y,z) &= 2xe^{x^2+y^2} \\
\partial_{21} f(x,y,z) &= (z+5)(4xy)e^{x^2+y^2} \\
\partial_{22} f(x,y,z) &= (z+5)(4y^2+2)e^{x^2+y^2} \\
\partial_{23} f(x,y,z) &= 2ye^{x^2+y^2} \\
\partial_{31} f(x,y,z) &= 2xe^{x^2+y^2} \\
\partial_{32} f(x,y,z) &= 2ye^{x^2+y^2} \\
\partial_{33} f(x,y,z) &= 0.
\end{aligned}$$

Die Hesse-Matrix von f, zugleich die Darstellungsmatrix von $f''(x, y, z)$ bezüglich der Einheitsbasis $\mathcal{E}$, ist also in jedem Punkt $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ gegeben durch

$$\mathcal{M}_{\mathcal{E}}(f''(x,y,z)) = e^{x^2+y^2} \begin{pmatrix} (4x^2+2)(z+5) & 4xy(z+5) & 2x \\ 4xy(z+5) & (4y^2+2)(z+5) & 2y \\ 2x & 2y & 0 \end{pmatrix}.$$

Nun berechnen wir die Darstellungsmatrix von $f''(x, y, z)$ bezüglich $\mathcal{B}$ durch Anwendung der Transformationsformel für Bilinearformen. Die Darstellungen der Vektoren u, v, w als Linearkombinationen der Einheitsbasis, also $u = 1 \cdot e_1 + 0 \cdot e_2 + 0 \cdot e_3$, $v = 1 \cdot e_1 + (-1)e_2 + 0 \cdot e_3$, $w = 1 \cdot e_1 + (-1)e_2 + 1 \cdot e_3$, liefern die drei Spalten der Transformationsmatrix

$$\mathcal{T}^{\mathcal{B}}_{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Mit der Transformationsformel erhalten wir nun

$$\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(f''(x,y,z)) \quad = \quad {}^{\mathrm{t}}\mathcal{T}_{\mathcal{E}}^{\mathcal{B}} \mathcal{M}_{\mathcal{E}}(f''(x,y,z)) \mathcal{T}_{\mathcal{E}}^{\mathcal{B}} \quad =$$

$$e^{x^2+y^2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (4x^2+2)(z+5) & 4xy(z+5) & 2x \\ 4xy(z+5) & (4y^2+2)(z+5) & 2y \\ 2x & 2y & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad =$$

$$e^{x^2+y^2} \begin{pmatrix} (4x^2+2)(z+5) & 4xy(z+5) & 2x \\ (4x^2-4xy+2)(z+5) & (4xy-4y^2-2)(z+5) & 2(x-y) \\ (4x^2-4xy+2)(z+5)+2x & (4xy-4y^2-2)(z+5)+2y & 2(x-y) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad =$$

$$e^{x^2+y^2} \begin{pmatrix} (4x^2+2)(z+5) & (4x^2-4xy+2)(z+5) & (4x^2-4xy+2)(z+5)+2x \\ (4x^2-4xy+2)(z+5) & 4(x^2+y^2-2xy+1)(z+5) & 4(x^2+y^2-2xy+1)(z+5)+2(x-y) \\ (4x^2-4xy+2)(z+5)+2x & 4(x^2+y^2-2xy+1)(z+5)+2(x-y) & 4(x^2+y^2-2xy+1)(z+5)+4(x-y) \end{pmatrix}$$

Anmerkung:
Man kann die Darstellungsmatrix $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(f''(x,y,z))$ auch, wie in der Tutoriumsaufgabe, durch Einsetzen der Vektoren u, v, w in die Bilinearform $f''(x,y,z)$ ausrechnen. Eine weitere (wenn auch sehr umständliche) Methode wäre es, die Darstellungsmatrix durch die zweifachen Richtungsableitungen auszudrücken

$$\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(f''(x,y,z)) \quad = \quad \begin{pmatrix} \partial_u\partial_u f(x,y,z) & \partial_u\partial_v f(x,y,z) & \partial_u\partial_w f(x,y,z) \\ \partial_v\partial_u f(x,y,z) & \partial_v\partial_v f(x,y,z) & \partial_v\partial_w f(x,y,z) \\ \partial_w\partial_u f(x,y,z) & \partial_w\partial_v f(x,y,z) & \partial_w\partial_w f(x,y,z) \end{pmatrix} \quad ,$$

und die zweifachen Richtungsableitungen mit Hilfsfunktionen auszurechnen. Definiert man beispielsweise die Hilfsfunktion $\phi(t) = (x+t, y-t, z)$, dann erhält man $\partial_v f(x,y,z)$ durch $(f \circ \phi)(t) = (z+5)e^{(x+t)^2+(y-t)^2} = (z+5)e^{x^2+y^2+2(x-y)t+2t^2}$, $(f \circ \phi)'(t) = (2(x-y)+4t)(z+5)e^{x^2+y^2+2(x-y)t+2t^2}$ und

$$\partial_v f(x,y,z) \quad = \quad (f \circ \phi)'(0) \quad = \quad 2(x-y)(z+5)e^{x^2+y^2}.$$

Den Matrixeintrag an der Position $(2,2)$ erhält man nun durch

$$(\partial_v f \circ \phi)(t) = 2((x+t)-(y-t))(z+5)e^{(x-t)^2+(y+t)^2} = 2(x-y+2t)(z+5)e^{x^2+y^2+2(x-y)t+2t^2} \quad ,$$

$$(\partial_v f \circ \phi)'(t) = 4(z+5)e^{x^2+y^2+2(x-y)t+2t^2} + 2(x-y+2t)(z+5)(2(x-y)+4t)(z+5)e^{x^2+y^2+2(x-y)t+2t^2} \quad ,$$

$$\begin{aligned} \partial_v\partial_v f(x,y,z) \quad &= \quad (\partial_v f \circ \phi)'(0) \quad = \quad 4(1+(x-y)^2)(z+5)e^{x^2+y^2} \\ &= \quad 4(x^2+y^2-2xy+1)(z+5)e^{x^2+y^2}. \end{aligned}$$

Aufgabe 2

Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ die Abbildung mit den Komponentenfunktionen f_1, f_2, f_3, also $f(t) = {}^{\mathrm{t}}(f_1(t), f_2(t), f_3(t))$ für alle $t \in \mathbb{R}$. Dann gilt jeweils

$$(g \circ f)(t) \quad = \quad g(f_1(t), f_2(t), f_3(t)) \quad = \quad f_1(t)f_2(t) + f_1(t)f_3(t) + f_2(t)f_3(t) \quad = \quad F(t)$$

also $g \circ f = F$. Die totalen Ableitungen von f und g sind gegeben durch

$$f'(t) \quad = \quad \begin{pmatrix} f_1'(t) \\ f_2'(t) \\ f_3'(t) \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad g'(x,y,z) \quad = \quad \begin{pmatrix} y+z & x+z & x+y \end{pmatrix}$$

für alle $t \in \mathbb{R}$ und $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$. Durch Anwendung der mehrdimensionalen Kettenregel erhalten wir

$$F'(t) \quad = \quad (g \circ f)'(t) \quad = \quad g'(f(t)) \cdot f'(t) \quad = \quad g'(f_1(t), f_2(t), f_3(t)) \cdot \begin{pmatrix} f_1'(t) \\ f_2'(t) \\ f_3'(t) \end{pmatrix} \quad =$$

$$\begin{pmatrix} f_2(t) + f_3(t) & f_1(t) + f_3(t) & f_1(t) + f_2(t) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} f_1'(t) \\ f_2'(t) \\ f_3'(t) \end{pmatrix} \quad =$$

$$f_1'(t)(f_2(t) + f_3(t)) + f_2'(t)(f_1(t) + f_3(t)) + f_3'(t)(f_1(t) + f_2(t)).$$

Aufgabe 3

Folgende Einzelschritte sind auszuführen:

(i) Berechnung der Umkehrfunktion g durch Auflösen der Gleichung $(u,v,w) = f(x,y,z)$ für vorgegebenes $(x,y,z) \in U$ nach (x,y,z)

(ii) Nachweis der Gleichungen $g \circ f = \mathrm{id}_U$ und $f \circ g = \mathrm{id}_V$ um sicherzustellen, dass f und g tatsächlich zueinander inverse Bijektionen $U \to V$ und $V \to U$ sind

(iii) Überprüfung der Voraussetzungen der Umkehrregel

(iv) Anwendung der Umkehrregel

zu (i) Vorweg erinnern wir daran, dass man durch Einschränkung der Sinusfunktion eine Bijektion $\left]-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi\right[\to]-1,1[$ und durch Einschränkung der Kosinusfunktion eine Bijektion $]0,\pi[\to]-1,1[$ erhält. Die Umkehrfunktion ist jeweils der Arcus sinus bzw. der Arcus cosinus.

Sei nun $(u,v,w) = f(x,y,z)$, also $u = e^x \cos(y)$, $v = e^x \sin(y)$ und $w = \cos(z)$. Wegen $\cos(z) \in]-1,1[$ dürfen wir auf $w = \cos(z)$ den Arcus cosinus anwenden und erhalten $z = \arccos(w)$. Weiter gilt $u^2 + v^2 = e^{2x}\cos(y)^2 + e^{2x}\sin(y)^2 = e^{2x}$. Weil die Exponentialfunktion nicht Null wird, darf auf diese Gleichung die Logarithmus-Funktion angewendet werden. Wir erhalten $\ln(u^2+v^2) = 2x$ und $x = \frac{1}{2}\ln(u^2+v^2)$. Aus $v = e^x \sin(y) = e^{\frac{1}{2}\ln(u^2+v^2)}\sin(y) = (u^2+v^2)^{1/2}\sin(y)$ folgt $\sin(y) = \frac{v}{\sqrt{u^2+v^2}}$. Wegen $y \in \left]-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi\right[$ ist $\cos(y) \neq 0$ und somit $u \neq 0$. Daraus folgt $v^2 < u^2 + v^2$ und $-1 < \frac{v}{\sqrt{u^2+v^2}} < 1$. Wir dürfen auf beide Seiten der Gleichung $\sin(y) = \frac{v}{\sqrt{u^2+v^2}}$ den Arcussinus anwenden und erhalten $y = \arcsin(\frac{v}{\sqrt{u^2+v^2}})$. Die

Gleichungen $x = \frac{1}{2}\ln(u^2+v^2)$, $y = \arcsin(\frac{v}{u^2+v^2})$, $z = \arccos(w)$ liefern uns einen Kandidaten für eine Umkehrfunktion $g : V \to \mathbb{R}^3$, nämlich

$$g(u,v,w) \quad = \quad \left(\tfrac{1}{2}\ln(u^2+v^2)\ ,\ \arcsin(\tfrac{v}{\sqrt{u^2+v^2}})\ ,\ \arccos(w)\right).$$

Die Funktion g ist tatsächlich auf ganz V definiert, denn für jedes $(u,v,w) \in V$ gilt $u^2+v^2 > 0$, $w \in \,]-1,1[$ und $\frac{v}{\sqrt{u^2+v^2}} \in \,]-1,1[$, wie oben ausgeführt.

zu (ii) Zum Beweis von $g \circ f = \mathrm{id}_U$ sei $(x,y,z) \in U$ vorgegeben und $(u,v,w) = f(x,y,z)$, also $u = e^x\cos(y)$, $v = e^x\sin(y)$ und $w = \cos(z)$. Zu zeigen ist $g(u,v,w) = (x,y,z)$, also $x = \frac{1}{2}\ln(u^2+v^2)$, $y = \arcsin(\frac{v}{\sqrt{u^2+v^2}})$ und $z = \arccos(w)$. Die letzte Gleichung ist wegen $\arccos(w) = \arccos(\cos(z)) = z$ offenbar erfüllt. Weiter gilt $\frac{1}{2}\ln(u^2+v^2) = \frac{1}{2}\ln(e^{2x}\cos(y)^2 + e^{2x}\sin(y)^2) = \frac{1}{2}\ln(e^{2x}) = \frac{1}{2}\cdot 2x = x$ und schließlich wegen $u^2+v^2 = e^{2x}$, $\sqrt{u^2+v^2} = e^x$ und $v = e^x\sin(y)$ auch $\frac{v}{\sqrt{u^2+v^2}} = \frac{e^x\sin(y)}{e^x} = \sin(y)$ und somit $\arcsin(\frac{v}{\sqrt{u^2+v^2}}) = \arcsin(\sin(y)) = y$.

Zum Beweis von $f \circ g = \mathrm{id}_V$ sei $(u,v,w) \in V$ vorgegeben und $(x,y,z) = g(u,v,w)$, also $x = \frac{1}{2}\ln(u^2+v^2)$, $y = \arcsin(\frac{v}{\sqrt{u^2+v^2}})$ und $z = \arccos(w)$. Zu zeigen ist $f(x,y,z) = (u,v,w)$, also $u = e^x\cos(y)$, $v = e^x\sin(y)$ und $w = \cos(z)$. Die letzte Gleichung gilt wegen $\cos(z) = \cos(\arccos(w)) = w$. Weiter gilt $e^x\sin(y) = e^x\sin(\arcsin(\frac{v}{\sqrt{u^2+v^2}})) = e^x\cdot\frac{v}{\sqrt{u^2+v^2}}$, $e^x = \exp(\frac{1}{2}\ln(u^2+v^2)) = \sqrt{u^2+v^2}$, somit $e^x\sin(y) = \sqrt{u^2+v^2}\cdot\frac{v}{\sqrt{u^2+v^2}} = v$ und $e^{2x}\cos(y)^2 = e^{2x}(1-\sin(y)^2) = e^{2x} - e^{2x}\sin(y)^2 = u^2+v^2-v^2 = u^2$, woraus schließlich $e^x\cos(y) = \sqrt{u^2} = u$ folgt.

zu (iii) Die Funktion f ist stetig differenzierbar, weil die Komponenten von f aus beliebig oft differenzierbaren Funktionen zusammengesetzt sind. Die Funktion $f : U \to V$ ist eine Bijektion, und die Umkehrfunktion $g : V \to U$ ist stetig, weil ihre Komponenten ebenfalls aus beliebig oft differenzierbaren Funktionen zusammengesetzt sind. Als einzige weitere Voraussetzung der Umkehrregel ist noch zu zeigen, dass $f'(x,y,z)$ in jedem Punkt $(x,y,z) \in U$ invertierbar ist. Dazu berechnen wir zunächst die Jacobi-Matrix von f in einem solchen Punkt. Die Komponentenfunktionen von f sind gegeben durch $f_1(x,y,z) = e^x\cos(y)$, $f_2(x,y,z) = e^x\sin(y)$, $f_3(x,y,z) = \cos(z)$ und haben die partiellen Ableitungen

$$\partial_1 f_1(x,y,z) = e^x\cos(y) \quad , \quad \partial_2 f_1(x,y,z) = -e^x\sin(y) \quad , \quad \partial_3 f_1(x,y,z) = 0$$

$$\partial_1 f_2(x,y,z) = e^x\sin(y) \quad , \quad \partial_2 f_2(x,y,z) = e^x\cos(y) \quad , \quad \partial_3 f_2(x,y,z) = 0$$

$$\partial_1 f_3(x,y,z) = \partial_2 f_3(x,y,z) = 0 \quad , \quad \partial_3 f_3(x,y,z) = \sin(z)$$

insgesamt gilt also

$$f'(x,y,z) \quad = \quad \begin{pmatrix} e^x\cos(y) & -e^x\sin(y) & 0 \\ e^x\sin(y) & e^x\cos(y) & 0 \\ 0 & 0 & -\sin(z) \end{pmatrix}.$$

Die Determinante der Jacobi-Matrix ist jeweils gegeben durch

$$\det f'(x,y,z) \quad = \quad \det\begin{pmatrix} e^x\cos(y) & -e^x\sin(y) & 0 \\ e^x\sin(y) & e^x\cos(y) & 0 \\ 0 & 0 & -\sin(z) \end{pmatrix} \quad =$$

$$\det\begin{pmatrix} e^x\cos(y) & -e^x\sin(y) \\ e^x\sin(y) & e^x\cos(y) \end{pmatrix}\det\begin{pmatrix} -\sin(z) \end{pmatrix} \quad = \quad -e^{2x}\left(\cos(y)^2+\sin(y)^2\right)\sin(z) \quad = \quad -e^{2x}\sin(z).$$

Für alle $(x,y,z) \in U$ gilt $z \in \,]0,\pi[$, also $\sin(z) > 0$ und damit insbesondere $\det f'(x,y,z) = e^{2x}\sin(z) \neq 0$. Insgesamt sind damit alle Voraussetzungen der Umkehrregel erfüllt. Folglich ist die Umkehrabbildung g auf ganz V differenzierbar.

zu (iv) Ist $(u,v,w) \in V$ vorgegeben und setzen wir

$$(x,y,z) \quad = \quad f^{-1}(u,v,w) \quad = \quad \left(\tfrac{1}{2}\ln(u^2+v^2), \arcsin\left(\tfrac{v}{\sqrt{u^2+v^2}}\right), \arccos(w)\right),$$

dann gilt

$$\begin{pmatrix} e^x\cos(y) & -e^x\sin(y) \\ e^x\sin(y) & e^x\cos(y) \end{pmatrix}^{-1} \quad = \quad e^{-2x}\begin{pmatrix} e^x\cos(y) & e^x\sin(y) \\ -e^x\sin(y) & e^x\cos(y) \end{pmatrix} \quad = \quad \begin{pmatrix} e^{-x}\cos(y) & e^{-x}\sin(y) \\ -e^{-x}\sin(y) & e^{-x}\cos(y) \end{pmatrix}$$

und somit

$$g'(u,v,w) \quad = \quad f'(x,y,z)^{-1} \quad = \quad \begin{pmatrix} e^x\cos(y) & -e^x\sin(y) & 0 \\ e^x\sin(y) & e^x\cos(y) & 0 \\ 0 & 0 & -\sin(z) \end{pmatrix}^{-1}$$

$$= \quad \begin{pmatrix} e^{-x}\cos(y) & e^{-x}\sin(y) & 0 \\ -e^{-x}\sin(y) & e^{-x}\cos(y) & 0 \\ 0 & 0 & -\sin(z)^{-1} \end{pmatrix}.$$

Die Rechnung von oben zeigt, dass aus $(u,v,w) = f(x,y,z)$ die Gleichungen $e^{2x} = u^2+v^2$, $\sin(y) = \frac{v}{\sqrt{u^2+v^2}}$ und somit auch $e^{-x} = \frac{1}{\sqrt{u^2+v^2}}$ und

$$\cos(y) \quad = \quad \sqrt{1-\sin(y)^2} \quad = \quad \sqrt{1-\frac{v^2}{u^2+v^2}} \quad = \quad \sqrt{\frac{u^2}{u^2+v^2}} \quad = \quad \frac{u}{\sqrt{u^2+v^2}}$$

folgen. Weil $\sin(z)$ wegen $z \in \,]0,\pi[$ positiv ist und wegen $\sin(z)^2 = 1-\cos(z)^2 = 1-w^2$ gilt auch $\sin(z) = \sqrt{1-w^2}$. Setzen wir diese Ausdrücke in die berechnete inverse Matrix ein, so erhalten wir schließlich

$$g'(u,v,w) \quad = \quad \begin{pmatrix} \frac{u}{u^2+v^2} & \frac{v}{u^2+v^2} & 0 \\ -\frac{v}{u^2+v^2} & \frac{u}{u^2+v^2} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{\sqrt{1-w^2}} \end{pmatrix}$$