Analysis mehrerer Variablen

— Lösung Blatt 10 —

(Tutoriumsblatt)

Aufgabe 0

zu (a) Die Jacobimatrix hat die allgemeine Form

$$f'(x,y,z) \quad = \quad \begin{pmatrix} \partial_1 f_1(x,y,z) & \partial_2 f_1(x,y,z) & \partial_3 f_1(x,y,z) \\ \partial_1 f_2(x,y,z) & \partial_2 f_2(x,y,z) & \partial_3 f_2(x,y,z) \\ \partial_1 f_3(x,y,z) & \partial_2 f_3(x,y,z) & \partial_3 f_3(x,y,z) \end{pmatrix}$$

Für die angebene Funktion gilt also insbesondere

$$f'(x,y,z) \quad = \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4y & 0 \\ 0 & 0 & 9z^2 \end{pmatrix}$$

An der Stelle $(1,2,3)$ erhalten wir somit die Matrix

$$f'(1,2,3) \quad = \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 81 \end{pmatrix}.$$

zu (b) Die totale Differenzierbarkeit an der Stelle a bedeutet, dass eine lineare Abbildung $\phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ und eine Abbildung $\psi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ existieren mit $f(a+h) = f(a) + \phi(h) + \psi(h)$ und $\lim\limits_{h \to 0_{\mathbb{R}^3}} \psi(h)/\|h\| = 0$, wobei $\|\cdot\|$ eine beliebige Norm auf dem $\mathbb{R}^3$ bezeichnet, zum Beispiel $\|\cdot\|_\infty$ oder die euklidische Norm. In der konkret angegebenen Situation ist $U_a = \mathbb{R}^3$ (weil auch f auf dem gesamten $\mathbb{R}^3$ definiert ist), $\phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ ist gegeben durch Matrix-Vektor-Multiplikation mit der Matrix $f'(1,2,3)$ aus Teil (a), und der Fehlerterm ist

$$\psi(h) \quad = \quad f(a+h) - f(a) - \phi(h) \quad = \quad f\begin{pmatrix} 1+h_1 \\ 2+h_2 \\ 3+h_3 \end{pmatrix} - f\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} - f'(1,2,3)\begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \end{pmatrix}$$

$$= \quad \begin{pmatrix} 1+h_1 \\ 2(2+h_2)^2 \\ 3(3+h_3)^3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 8 \\ 81 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 81 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \end{pmatrix}$$

$$= \quad \begin{pmatrix} 1+h_1 \\ 8+8h_2+2h_2^2 \\ 81+81h_3+27h_3^2+3h_3^3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 8 \\ 81 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} h_1 \\ 8h_2 \\ 81h_3 \end{pmatrix} \quad = \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 2h_2^2 \\ 27h_3^2+3h_3^3 \end{pmatrix}$$

zu (c) Hier ist $U_a = \,]-1,1[$, und die lineare Abbildung $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist gegeben durch Multiplikation mit $f'(1)$ (oder, was auf dasselbe hinausläuft, durch Matrix-Vektor-Multiplikation mit der Matrix $(\ f'(1)\ ) \in \mathcal{M}_{1,\mathbb{R}}$).

zu (d) Es ist $f'(x) = \begin{pmatrix} 2x+3 \end{pmatrix}$ und $f'(4) = \begin{pmatrix} 11 \end{pmatrix}$. Nach Prop. (8.4) erhält man die Richtungsableitung durch $\partial_{-5} f(4) = f'(4)(-5) = \begin{pmatrix} 11 \end{pmatrix} \cdot (-5) = -55$.

Aufgabe 1

zu (a) Nach Prop. (8.3) genügt es zu zeigen, dass die drei Komponentenfunktionen $f_1(x,y,z) = x^3\sin(z)$, $f_2(x,y,z) = xy\cos(xz)$ und $f_3(x,y,z) = e^{x^2+y^2}\sin(z)$ in jedem Punkt ihres Definitionsbereichs total differenzierbar sind. Die drei partiellen Ableitungen von f_1 sind gegeben durch

$$\partial_1 f_1(x,y,z) = 3x^2\sin(z) \quad , \quad \partial_2 f_1(x,y,z) = 0 \quad , \quad \partial_3 f_1(x,y,z) = x^3\cos(z).$$

Diese sind offenbar auf ganz $\mathbb{R}^3$ stetig, da die durch Verknüpfung stetiger Funktionen zu Stande kommen. Nach Satz (11.8) ergibt sich damit die totale Differenzierbarkeit von f_1 auf dem gesamten $\mathbb{R}^3$. Genau erkennt man anhand der partiellen Ableitungen von f_2 und f_3 gegeben durch

$$\partial_1 f_2(x,y,z) = y\cos(xz) - xyz\sin(xz) \quad , \quad \partial_2 f_2(x,y,z) = x\cos(xz) \quad , \quad \partial_3 f_2(x,y,z) = -x^2y\sin(xz)$$

$$\partial_1 f_3(x,y,z) = 2xe^{x^2+y^2}\sin(z) \quad , \quad \partial_2 f_3(x,y,z) = 2ye^{x^2+y^2}\sin(z) \quad , \quad \partial_3 f_3(x,y,z) = e^{x^2+y^2}\cos(z)$$

dass f_2 und f_3 auf $\mathbb{R}^3$ total differenzierbar sind.

zu (b) Die Jacobimatrix an einer beliebigen Stelle $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ ist gegeben durch

$$f'(x,y,z) \quad = \quad \begin{pmatrix} 3x^2\sin(z) & 0 & x^3\cos(z) \\ y\cos(xz) - xyz\sin(xz) & x\cos(xz) & -x^2y\sin(xz) \\ 2xe^{x^2+y^2}\sin(z) & 2ye^{x^2+y^2}\sin(z) & e^{x^2+y^2}\cos(z) \end{pmatrix}.$$

zu (c) Die Jacobi-Matrix von f an der Stelle $(0,1,\pi)$ erhält man durch Einsetzen der Werte $x = 0$, $y = 1$, $z = \pi$ in die Matrix, also

$$f'(0,1,\pi) \quad = \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -e \end{pmatrix}$$

Die Ableitung $f_2'(0,1,\pi)$ ist die zweite Zeile dieser Matrix, also $f_2'(0,1,\pi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Nach Prop. (11.4) erhält man die Richtungsableitung durch

$$\partial_{(2,3,4)} f_2'(0,1,\pi) \quad = \quad f_2'(0,1,\pi) \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \quad = \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \quad = \quad 2.$$

Aufgabe 2

Wir überprüfen die Definition der totalen Differenzierbarkeit in jedem Punkt des $\mathbb{R}^n$. Sei also $c \in \mathbb{R}^n$ vorgegeben, außerdem $\phi, \psi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ gegeben durch $\phi(x) = Ax$ und $\psi(x) = 0_{\mathbb{R}^m}$ für jedes $x \in \mathbb{R}^n$. Dann ist ϕ offenbar eine lineare Abbildung, und es gilt $\lim_h \psi(h)/\|h\| = 0_{\mathbb{R}^m}$. Außerdem ist

$$f(c) + \phi(h) + \psi(h) \quad = \quad f(c) + Ah + 0_{\mathbb{R}^m} \quad = \quad (Ac + b) + Ah \quad = \quad A(c+h) + b \quad = \quad f(c+h)$$

für alle $h \in \mathbb{R}^n$ erfüllt. Dies zeigt, dass f in c total differenzierbar ist, und dass die Ableitung im Punkt c durch $f'(c)(x) = \phi(x) = Ax$ gegeben ist. (Die Ableitung von f ist also auf $\mathbb{R}^n$ konstant.)

Aufgabe 3

zu (a) Die Anwendung der l'Hospitalschen Regel auf die Funktion $g(x) = x^{1/2}e^{-x}$ liefert

$$\lim_{x\to+\infty} x^{1/2}e^{-x} \quad = \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{x^{1/2}}{e^x} \quad = \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{1}{2}x^{-1/2}}{e^x} \quad = \quad 0.$$

Ist nun $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge positiver reeller Zahlen mit $\lim_n h_n = 0$, dann gilt $\lim_n h_n^{-1} = +\infty$, und wegen $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = 0$ folgt $\lim\limits_{n\to\infty} h_n^{-1/2}e^{-1/h_n} = \lim\limits_{n\to\infty} g(h_n^{-1}) = 0$.

zu (b) Ist $((x_n, y_n))_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ mit $\lim_n(x_n, y_n) = (0,0)$ und setzen wir $h_n = \|(x_n, y_n)\|_2^2$ für jedes $n \in \mathbb{N}$, dann gilt $\lim_n h_n = 0$ auf Grund der Stetigkeit der Funktion $(x, y) \mapsto \|(x, y)\|_2^2 = x^2 + y^2$ im Punkt $(0,0)$. Mit Aufgabenteil (a) erhalten wir

$$\lim_{n\to\infty} \|(x_n, y_n)\|_2^{-1} f(x_n, y_n) \quad = \quad \lim_{n\to\infty} \|(x_n, y_n)\|_2^{-1} e^{-1/(x_n^2+y_n^2)} \quad = \quad \lim_{n\to\infty} h_n^{-1/2}e^{-1/h_n} \quad = \quad 0.$$

zu (c) Wir zeigen, dass die totale Ableitung von f im Punkt $(0,0)$ durch die lineare Abbildung $\phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto 0$ gegeben ist und definieren dazu $\psi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ durch $\psi(x, y) = f(x, y)$. Dann gilt offenbar $f(x, y) = f(0,0) + \phi(x, y) + \psi(x, y)$ für alle $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, und es bleibt

$$\lim_{h\to 0_{\mathbb{R}^2}} \frac{\psi(h)}{\|h\|_2} \quad = \quad \lim_{h\to 0_{\mathbb{R}^2}} \frac{f(h)}{\|h\|_2} \quad = \quad 0 \qquad \text{zu zeigen.}$$

Sei dafür $((x_n, y_n))_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ mit $\lim_n(x_n, y_n) = (0,0)$. Dann gilt nach Teil (b) $\lim_n \|(x_n, y_n)\|_2^{-1} f(x_n, y_n) = 0$. Damit ist $\lim\limits_{h\to 0_{\mathbb{R}^2}} \dfrac{\psi(h)}{\|h\|_2} = 0$ und somit auch $f'(0,0) = \phi$ nachgewiesen.

Nach Prop. (8.7) ist die Jacobimatrix an der Stelle $(0,0)$ die eindeutig bestimmte Matrix $A \in \mathcal{M}_{1\times 2,\mathbb{R}}$ mit der Eigenschaft $f'(0,0)(v) = Av$ für alle $v \in \mathbb{R}^2$. Wie wir bereits gezeigt haben, gilt $f'(0,0)(v) = \phi(v) = 0$ für alle $v \in \mathbb{R}^2$, also ist $A = (0\ 0)$ die Jacobimatrix von f im Punkt $(0,0)$.