... ; Begründung für $\partial_1 f_2$ analog

Globalübungsblatt 10

Aufgabe 1

z.zg.: angeg. Fkt. sind total diff'bar

Bestimmung der 1. Ableitung

bekannt: Ist $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $a \in U$, und $f: U \to \mathbb{R}^m$ eine in a total diff'bare Fkt, dann ist die Ableitung in a geg. durch $f'(a) = \left(\partial_j f_i(a)\right)_{\substack{1 \le i \le m \\ 1 \le j \le n}}$

außerdem:

Ist f eine partiell diff'bare Fkt auf U (d.h. $\partial_j f_i$ existiert auf U $\forall i, j$) und sind die partiellen

Ableitungen in a stetig, dann ist f in a (total) diff'bar.

<u>zu (a)</u> $f: (\mathbb{R}^+)^2 \to \mathbb{R}^2,\ (x,y) \mapsto (x+\sqrt{y}, \sqrt{x}+y)$

Die Komp. von f sind geg. durch $f_1, f_2 : (\mathbb{R}^+)^2 \to \mathbb{R}$,

$f_1(x,y) = x + \sqrt{y}$, $f_2(x,y) = \sqrt{x} + y$

$\partial_1 f_1(x,y) = 1$, $\partial_2 f_1(x,y) = \frac{1}{2\sqrt{y}}$,

$\partial_1 f_2(x,y) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$, $\partial_2 f_2(x,y) = 1$

$\partial_1 f_1, \partial_2 f_2$ sind konstant, also stetig

$(x,y) \mapsto y$ ist lt. Vorlesung stetig, die Komposition mit der auf $\mathbb{R}^+$ stetigen Fkt. $t \mapsto \sqrt{t}$ und mit $\mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, $t \mapsto 1/(2t)$ ist ebenfalls stetig $\Rightarrow \partial_2 f_1(x,y) = \frac{1}{2\sqrt{y}}$ ist stetig; Begründung für $\partial_1 f_2$ analog

Also ist f in jedem Punkt $(x,y) \in (\mathbb{R}^+)^2$ total diff'bar, mit der Ableitung $f'(x,y) = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2\sqrt{y}} \\ \frac{1}{2\sqrt{x}} & 1 \end{pmatrix}$

zu (b) $g : (\mathbb{R}^+)^3 \to \mathbb{R}^2,$

$(x,y,z) \mapsto (1+\ln(x),\ x\sqrt{y}+\sqrt{z})$

Komponenten: $g_1, g_2 : (\mathbb{R}^+)^3 \to \mathbb{R}$ geg. durch

$g_1(x,y,z) = 1+\ln(x)$, $g_2(x,y,z) = x\sqrt{y}+\sqrt{z}$

partielle Ableitungen: $\partial_1 g_1(x,y,z) = \frac{1}{x}$

$\partial_2 g_1(x,y,z) = \partial_3 g_1(x,y,z) = 0$

$\partial_1 g_2(x,y,z) = \sqrt{y}$, $\partial_2 g_2(x,y,z) = \frac{x}{2\sqrt{y}}$

$\partial_3 g_2(x,y,z) = \frac{1}{2\sqrt{z}}$

$\partial_2 g_1$, $\partial_3 g_1$ sind stetig, da konstant

$\partial_1 g_1$ ist stetig als Komposition der stetigen Abb.
$(\mathbb{R}^+)^3 \to \mathbb{R}$, $(x,y,z) \mapsto x$ und $\mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, $t \mapsto 1/t$

$\partial_3 g_2$ ist stetig als Komposition der stetigen Fkt.
$(\mathbb{R}^+)^3 \to \mathbb{R}$, $(x,y,z) \mapsto z$, $\mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$, $t \mapsto \sqrt{t}$ und
$\mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, $t \mapsto \frac{1}{(2t)}$

$\partial_1 g_2$ ist stetig als Komp. der stetigen Abb. $(\mathbb{R}^+)^3 \to \mathbb{R}$,
$(x,y,z) \mapsto x$ und $\mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ $t \mapsto \sqrt{t}$

Die Fkt. $(\mathbb{R}^+)^3 \to \mathbb{R}$, $(x,y,z) \mapsto x$ und $(\mathbb{R}^+)^3 \to \mathbb{R}$,
$(x,y,z) \mapsto \frac{1}{2\sqrt{y}}$ sind stetig (s.o.) Als Produkt dieser
Fkt. ist $\partial_2 g_2$ ebenfalls stetig.

Also ist g in jedem Punkt $(x,y,z) \in (\mathbb{R}^+)^3$ total diff'bar, und es gilt $g'(x,y,z) = \begin{pmatrix} \frac{1}{x} & 0 & 0 \\ \sqrt{y} & \frac{x}{2\sqrt{y}} & \frac{1}{2\sqrt{z}} \end{pmatrix}$.

__Aufgabe 2__ $\quad n \in \mathbb{N}$, $A = (a_{ij}) \in M_{n,\mathbb{R}}$

$(AB)C = A(BC)$

$AB \neq BA$

$f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $x \mapsto {}^t x A x$

z.zg.: f ist auf $\mathbb{R}^n$ total diff'bar

außerdem: Angabe der Ableitungsfunktion

Sei $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$ vorgeg., $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = Ax$

Nach Def. des Matrix-Vektor-Produkts gilt

$$y_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \text{ für } 1 \leq i \leq n.$$

$\Rightarrow {}^t x A x = {}^t x y = (x_1 \ldots x_n)\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^n x_i y_i$

$= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} x_i x_j .$

$\Rightarrow$ Die Funktion $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ist also geg. durch

$f(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} x_i x_j .$

Berechnung der partiellen Ableitungen:

Sei $k \in \{1, \ldots, n\}$. Dann gilt

$\partial_k f(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} \partial_k (x_i x_j) =$

$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} (x_i \partial_k (x_j) + \partial_k (x_i) x_j) =$

$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} (x_i \delta_{jk} + \delta_{ik} x_j) =$

$$\sum_{i=1} \sum_{j=1} a_{ij} \left(x_i \delta_{jk} + \delta_{ik} x_j \right) =$$

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i \delta_{jk} + \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \delta_{ik} x_j =$$

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ik} x_i + \sum_{j=1}^{n} a_{kj} x_j =$$

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ik} x_i + \sum_{i=1}^{n} a_{ki} x_i = \sum_{i=1}^{n} (a_{ik} + a_{ki}) x_i \quad (*)$$

$= {}^t(A_{\bullet k} + A_{k \bullet}) x$ ($A_{\bullet k}$ = k-ter Spaltenvektor, $A_{k \bullet}$ = k-ter Zeilenvektor der Matrix A)

Die partiellen Ableitungen sind wg. (*) Polynomfkt. und somit stetig auf dem gesamten $\mathbb{R}^n$. Also ist f auf $\mathbb{R}^n$ total diff'bar, mit Ableitung $f'(x) = \left({}^t(A_{\bullet 1} + A_{1 \bullet}) x \; \dots \; {}^t(A_{\bullet n} + A_{n \bullet}) x \right)$

Aufgabe 3

$$f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ (x,y) \mapsto \begin{cases} (x^2+y^2)\sin\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right) & \text{für } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{für } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

- Untersuchung auf totale Diff'barkeit im Nullpunkt
- Existenz der partiellen Ableitungen $\partial_1 f, \partial_2 f$, Stetigkeit im Nullpunkt

(i) Berechnung der partiellen Ableitungen:

Sei $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. 1 Fall: $(x,y) \neq (0,0)$

$$\partial_1\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right) = -\frac{2x}{(x^2+y^2)^2}, \quad \partial_2\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right) = -\frac{2y}{x^2+y^2}$$

Also gilt tatsächlich $g'(0) = 0$

$$\partial_1\left(\sin\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right)\right) = \cos\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right)\left(-\frac{2x}{(x^2+y^2)^2}\right)$$

$$\partial_2\left(\sin\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right)\right) = -\cos\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right)\frac{2y}{(x^2+y^2)^2}$$

$$\partial_1 f(x,y) = 2x\left(\sin\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right) - \cos\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right)\frac{1}{(x^2+y^2)^2}\right)$$

$$\partial_2 f(x,y) = 2y\left(\sin\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right) - \cos\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right)\frac{1}{(x^2+y^2)^2}\right)$$

2. Fall: $(x,y) = (0,0)$

Definiere $\phi_1, \phi_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ durch $\phi_1(t) = (t,0)$, $\phi_2(t) = (0,t)$

$$\left.\begin{aligned}(f\circ\phi_1)(t) &= f(t,0) = t^2 \sin\left(\tfrac{1}{t^2}\right)\\ (f\circ\phi_2)(t) &= f(0,t) = t^2 \sin\left(\tfrac{1}{t^2}\right)\end{aligned}\right\} \text{ für } t \neq 0$$

außerdem: $(f\circ\phi_1)(0) = f(0,0) = 0$, $(f\circ\phi_2)(0) = 0$

Bsp: Die Fkt. $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ t \mapsto \begin{cases} t^2 \sin\left(\frac{1}{t^2}\right) & \text{für } t \neq 0 \\ 0 & \text{für } t = 0 \end{cases}$

ist im Nullpunkt diff'bar, und es gilt $g'(0) = 0$.

(Daraus folgt $\partial_1 f(0,0) = (f \circ \phi_1)'(0) = g'(0) = 0$, ebenso $\partial_2 f(0,0) = 0$.)

Sei $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ mit $\lim\limits_{n \to \infty} t_n = 0$.

Für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt $\frac{g(t_n) - g(0)}{t_n - 0} = t_n^{-1} g(t_n) = t_n^{-1} t_n^2 \sin(t_n^{-2})$
$= t_n \sin(t_n^{-2})$. Es gilt also $0 \leq \left| \frac{g(t_n) - g(0)}{t_n - 0} \right| \leq |t_n| \ \forall n \in \mathbb{N}$.

Wegen $\lim\limits_{n \to \infty} |t_n| = 0$ folgt $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{g(t_n) - g(0)}{t_n - 0} = 0$, nach dem Sandwich-Lemma. Also gilt tatsächlich $g'(0) = 0$.

Ergebnis:

$$\partial_1 f(x,y) = \begin{cases} -\cos\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right)\frac{2x}{(x^2+y^2)^2} & \text{für } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{für } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

$$\partial_2 f(x,y) = \begin{cases} -\cos\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right)\frac{2y}{(x^2+y^2)^2} & \text{für } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{für } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

$$\partial_1 f(x,0) = \begin{cases} -\cos(x^{-2})\, 2x^{-3} & \text{für } x \neq 0 \\ 0 & \text{für } x = 0 \end{cases}$$

Betrachte die Folge $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ geg. durch $t_n = \frac{1}{\sqrt{2\pi n}}$.

Dann gilt $\lim_{n\to\infty} t_n = 0$, aber: $\partial_1 f(t_n,0) = -\cos(2\pi n)\, 2(2\pi n)^{3/2} = -2(2\pi n)^{3/2}$

Die Folge $(\partial_1 f(t_n, 0))_{n\in\mathbb{N}}$ ist also unbeschränkt,
konvergiert also nicht gegen $\partial_1 f(0,0) = 0$
Also ist $\partial_1 f$ im Nullpunkt unstetig.
Der Nachweis der Unstetigkeit von $\partial_2 f$ in $(0,0)$ läuft analog.

Untersuchung der totalen Diff'barkeit im Nullpunkt.
Wegen $\partial_1 f(0,0) = \partial_2 f(0,0) = 0$ gilt im Fall der totalen Diff'barkeit in $(0,0)$, dass $f'(0,0) = 0$.
Außerdem ist $f(0,0) = 0$. Also ist f genau dann in $(0,0)$ total diff'bar, wenn $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y)}{\|(x,y)\|_\infty} = 0$ gilt.

$$f(x,y) = (x^2+y^2)\sin\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right) \text{ für } (x,y) \neq (0,0)$$

$$f(0,0) = 0$$

Sei also $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ vorgeg.

1. <u>Fall</u>: $y \neq 0$ $\quad \left|\sin\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right)\right| \leq 1$

Ist $x = 0$, dann gilt also $\frac{|f(x,y)|}{\|(x,y)\|_\infty} \leq \frac{x^2+y^2}{\|(x,y)\|_\infty} = \frac{y^2}{|y|}$

ansonsten $\frac{|f(x,y)|}{\|(x,y)\|_\infty} \leq \frac{x^2}{\|(x,y)\|_\infty} + \frac{y^2}{\|(x,y)\|_\infty} \leq \frac{x^2}{|x|} + \frac{y^2}{|y|}$

2. <u>Fall</u>: $y = 0$ Dann ist $x \neq 0$ $\Rightarrow$ erhalte

$$\frac{|f(x,y)|}{\|(x,y)\|_\infty} \leq \frac{x^2}{|x|}.$$

Die Rechnung zeigt: Für alle $(x,y) \neq (0,0)$ gilt:

$\frac{|f(x,y)|}{\|(x,y)\|_\infty} \le |x| + |y|$. Ist nun $((x_n, y_n))_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ mit $\lim\limits_{n\to\infty} (x_n, y_n) = (0,0)$, dann gilt $\lim\limits_{n\to\infty} (|x_n| + |y_n|) = 0$ und somit $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{|f(x_n,y_n)|}{\|(x_n,y_n)\|_\infty} = 0$ nach dem Sandwich-Lemma.

also: f total diff'bar in $(0,0)$, $f'(0,0) = 0$