Analysis mehrerer Variablen (LA Gym)

— **Lösung Blatt 10** —

(Globalübungsblatt)

Aufgabe 1

siehe Tafel

Aufgabe 2

Zunächst bestimmen wir die Funktion f zu der vorgegebenen Matrix $A = (a_{ij})$ in ausgeschriebener Form. Sei dazu $x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$ und $y = Ax$. Nach Definition des Matrix-Vektor-Produkts ist die i-te Komponente von y gegeben durch $y_i = \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j$, für $1 \leq i \leq n$. Es folgt

$$f(x) \quad = \quad {}^{\mathrm{t}}xAx \quad = \quad {}^{\mathrm{t}}xy \quad = \quad \sum_{i=1}^n x_i y_i \quad = \quad \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij}x_i x_j.$$

In dieser Darstellung können wir nun die partiellen Ableitungen von f berechnen. Für die Berechnung verwenden wir das Kronecker-Delta aus der Linearen Algebra (gegeben durch $\delta_{ii} = 1$ und $\delta_{ij} = 0$ für $1 \leq i, j \leq n$, $i \neq j$) und die Tatsache, dass die partiellen Ableitungen auf den Polynomfunktionen durch $\partial_i(x_j) = \delta_{ij}$ festgelegt sind, für $1 \leq i, j \leq n$. Für $1 \leq k \leq n$ gilt nun jeweils

$$(\partial_k f)(x) \quad = \quad \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij}\partial_k(x_i x_j) \quad = \quad \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij}(\partial_k(x_i)x_j + x_i\partial_k(x_j)) \quad =$$

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij}(\delta_{ki}x_j + x_i\delta_{kj}) \quad = \quad \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij}\delta_{ki}x_j + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij}x_i\delta_{kj} \quad =$$

$$\sum_{j=1}^n a_{kj}x_j + \sum_{i=1}^n a_{ik}x_i \quad = \quad \sum_{i=1}^n a_{ki}x_i + \sum_{i=1}^n a_{ik}x_i \quad = \quad \sum_{i=1}^n (a_{ki} + a_{ik})x_i \quad = \quad {}^{\mathrm{t}}(A_{k\bullet} + A_{\bullet k})x \quad ,$$

wobei am Ende $A_{k\bullet} \in \mathbb{R}^n$ den k-ten Zeilenvektor und $A_{\bullet k}$ den k-ten Spaltenvektor der Matrix A bezeichnet. Wie die Funktion f sind also auch die partiellen Ableitungen $\partial_k f$ Polynomfunktionen, und somit stetig. Dies zeigt, dass die Funktion f total differenzierbar ist, mit der totalen Ableitung

$$f'(x) \quad = \quad \left({}^{\mathrm{t}}(A_{1\bullet} + A_{\bullet 1})x \quad \cdots \quad {}^{\mathrm{t}}(A_{n\bullet} + A_{\bullet n})x \right).$$

Aufgabe 3

Zunächst berechnen wir die partiellen Ableitungen $\partial_1 f$ und $\partial_2 f$ auf ganz $\mathbb{R}^2$. Weil die Funktion f auf der offenen Menge $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ ohne Fallunterscheidung durch den Ausdruck $f(x,y) = (x^2+y^2)\sin(\frac{1}{x^2+y^2})$ definiert ist, können wir für die Bestimmung der partiellen Ableitungen auf dieser Teilmenge die gewöhnlichen Ableitungsregeln verwenden. Auf Grund der Quotientenregel gilt

$$\partial_1\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right) \quad = \quad -\frac{2x}{(x^2+y^2)^2}$$

und mit der Produkt- und der Kettenregel erhalten wir

$$\begin{aligned} \partial_1 f(x,y) \quad &= \quad 2x\sin\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right) + (x^2+y^2)\left(-\frac{2x}{(x^2+y^2)^2}\right)\cos\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right) \\ &= \quad 2x\sin\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right) - \frac{2x}{x^2+y^2}\cos\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right) \end{aligned}$$

für alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

Durch eine vollkommen analoge Rechnung erhält man

$$\partial_2 f(x,y) \quad = \quad 2y \sin\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right) - \frac{2y}{x^2+y^2} \cos\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right) \quad \text{für alle } (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}.$$

Nun berechnen wir die partiellen Ableitungen noch im Punkt $(0,0)$. Dazu verwenden wir die die Hilfsfunktionen $\phi_1, \phi_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ gegeben durch $\phi_1(t) = te_1 = (t,0)$ und $\phi_2(t) = te_2 = (0,t)$. Nach Definition existiert $\partial_1 f(0,0)$ genau dann, wenn $f \circ \phi_1$ in 0 differenzierbar ist, und in diesem Fall gilt $\partial_1 f(0,0) = (f \circ \phi)'(0)$. Für alle $t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ gilt $(f \circ \phi_1)(t) = f(t,0) = t^2 \sin(\frac{1}{t^2+0^2}) = t^2 \sin(t^{-2})$, außerdem $(f \circ \phi_1)(0) = f(0,0) = 0$. Insgesamt stimmt $f \circ \phi_1$ also auf ganz $\mathbb{R}$ mit der Funktion $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$g(t) \quad = \quad \begin{cases} t^2 \sin(t^{-2}) & \text{für } t \neq 0 \\ 0 & \text{für } t = 0 \end{cases}$$

überein. Wir zeigen, dass diese Funktion im Nullpunkt differenzierbar ist, mit Ableitung $g'(0) = 0$. Für alle $t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ist der Differenzialquotient von g gegeben durch

$$\frac{g(t) - g(0)}{t - 0} \quad = \quad t^{-1} g(t) \quad = \quad t \sin(t^{-2}).$$

Ist $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ mit $\lim_n t_n = 0$, dann gilt $0 \leq |t_n \sin(t_n^{-2})| \leq |t_n|$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Aus $\lim_n |t_n| = 0$ folgt $\lim_n |t_n \sin(t_n^{-2})| = 0$ mit dem Sandwich-Lemma, also auch $\lim_n t_n \sin(t_n^{-2}) = 0$. Damit ist der Nachweis von $\partial_1 f(0,0) = (f \circ \phi_1)'(0) = 0$ abgeschlossen. Ebenso überprüft man, dass auch $(f \circ \phi_2)(t) = g(t)$ für alle $t \in \mathbb{R}$ gilt, woraus sich auch $\partial_2 f(0,0) = 0$ ergibt. Insgesamt sind also die partiellen Ableitungen gegeben durch

$$\partial_1 f(x,y) \quad = \quad \begin{cases} 2x \sin\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right) - \frac{2x}{x^2+y^2} \cos\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right) & \text{für } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{für } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

und

$$\partial_2 f(x,y) \quad = \quad \begin{cases} 2y \sin\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right) - \frac{2y}{x^2+y^2} \cos\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right) & \text{für } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{für } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Wir zeigen nun, dass $\partial_1 f$ im Punkt $(0,0)$ unstetig ist und betrachten dazu die Folge $((x_n, y_n))_{n \in \mathbb{N}}$ gegeben durch $(x_n, y_n) = (\frac{1}{\sqrt{2\pi n}}, 0)$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Wegen $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x} = +\infty$ gilt $\lim_n \sqrt{2\pi n} = +\infty$ und somit $\lim_n \frac{1}{\sqrt{2\pi n}} = 0$, also $\lim_n (x_n, y_n) = (0,0)$. Wäre $\partial_1 f$ in $(0,0)$ stetig, dann müsste also $\lim_n \partial_1 f(x_n, y_n) = \partial_1 f(0,0) = 0$ gelten. Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt aber

$$\begin{aligned} \partial_1 f(x_n, y_n) \quad &= \quad 2 \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi n}} \cdot \sin\left(\frac{1}{\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi n}}\right)^2 + 0^2}\right) - \frac{2 \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi n}}}{\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi n}}\right)^2 + 0^2} \cdot \sin\left(\frac{1}{\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi n}}\right)^2 + 0^2}\right) \\ &= \quad \frac{2}{\sqrt{2\pi n}} \sin(2\pi n) - 2\sqrt{2\pi n} \cos(2\pi n) \quad = \quad \frac{2}{\sqrt{2\pi n}} \cdot 0 - 2\sqrt{2\pi n} \cdot 1 \quad = \quad -2\sqrt{2\pi n} \end{aligned}$$

und somit $\lim_n \partial_1 f(x_n, y_n) = -\infty$. Dies zeigt, dass $\partial_1 f$ im Nullpunkt unstetig ist. Für $\partial_2 f$ verwendet man entsprechend die Folge gegeben durch $(x_n, y_n) = (0, \frac{1}{\sqrt{2\pi n}})$, um zu zeigen, dass $\partial_2 f$ im Punkt $(0,0)$ unstetig ist.

Nun untersuchen wir noch die totale Differenzierbarkeit von f im Punkt $(0,0)$. Nach Definition ist f genau dann im Punkt $(0,0)$ total differenzierbar, wenn eine lineare Abbildung $\phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ und eine Funktion $\psi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ existieren mit der Eigenschaft, dass $f((0,0)+h) = f(0,0) + \phi(h) + \psi(h)$ und $\lim_{h\to 0} \|h\|_\infty^{-1}\psi(h) = 0$ erfüllt sind. Laut Vorlesung ist die totale Ableitung (im Falle der Existenz) durch die partiellen Ableitungen gegeben. Deshalb kommt für ϕ nur die lineare Abbildung gegeben durch die Nullmatrix $(\partial_1 f(0,0)\ \partial_2 f(0,0)) = (0\ 0)$ in Frage, es ist also $\phi = 0$. Außerdem gilt $f(0,0) = 0$. Insgesamt stimmt f also mit dem „Fehlerterm“ ψ überein, und wir müssen für den Nachweis der totalen Differenzierbarkeit im Nullpunkt zeigen, dass $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \|(x,y)\|_\infty^{-1} f(x,y) = 0$ gilt.

Dazu schätzen wir den Ausdruck $\|(x,y)\|_\infty^{-1} f(x,y)$ für beliebiges $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ betragsmäßig ab. Ist $x = 0$, dann gilt $y \neq 0$ und $|f(x,y)| = y^2 \sin(y^{-2})$ und $\|(x,y)\|_\infty^{-1} = |y|$, insgesamt also $\|(x,y)\|_\infty^{-1}|f(x,y)| = |y||\sin(y^{-2})| \leq |y|$. Ebenso erhält man im Fall $y = 0$ die Abschätzung $\|(x,y)\|_\infty^{-1}|f(x,y)| \leq |x|$. Ist $x \neq 0$ und $y \neq 0$, dann erhalten wir

$$\begin{aligned} \|(x,y)\|_\infty^{-1}|f(x,y)| &= \|(x,y)\|_\infty^{-1}(x^2+y^2)\left|\sin\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right)\right| \leq \|(x,y)\|_\infty^{-1}(x^2+y^2) \\ &= \|(x,y)\|_\infty^{-1}x^2 + \|(x,y)\|_\infty^{-1}y^2 \leq |x|^{-1}x^2 + |y|^{-1}y^2 = |x| + |y|. \end{aligned}$$

Die Abschätzung $\|(x,y)\|_\infty^{-1}|f(x,y)| \leq |x| + |y|$ ist also in jedem Fall gültig. Sei nun $((x_n,y_n))_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ mit $\lim_n (x_n,y_n) = (0,0)$. Dann gilt $\lim_n x_n = 0$, $\lim_n y_n = 0$, also auch $\lim_n(|x_n| + |y_n|) = 0$, und wegen $0 \leq \|(x_n,y_n)\|_\infty^{-1}|f(x_n,y_n)| \leq |x_n| + |y_n|$ für alle $n \in \mathbb{N}$ folgt $\lim_n \|(x_n,y_n)\|_\infty^{-1}|f(x_n,y_n)| = 0$, mit dem Sandwich-Lemma. Also gilt tatsächlich $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \|(x,y)\|_\infty^{-1} f(x,y) = 0$. Die Funktion f ist also im Nullpunkt total differenzierbar, mit $f'(0,0) = (0\ 0)$ als totaler Ableitung.

Hinweis:
Das Beispiel zeigt, dass die Umkehrung von Satz (8.8) im Allgemeinen falsch ist: Aus der totalen Differenzierbarkeit in einem Punkt folgt im Allgemeinen nicht die Stetigkeit der partiellen Ableitungen.