

Analysis mehrerer Variablen

— Lösung Blatt 9 —

(Tutoriumsblatt)

Aufgabe 0

zu (a) Jede einelementige Menge $\{x\}$ von X ist zusammenhängend, denn es gibt keine Zerlegung von $\{x\}$ in zwei disjunkte nichtleere Mengen, erst recht keine Zerlegung in zwei in $\{x\}$ *relativ offene* disjunkte nichtleere Mengen. Auch für die leere Menge gibt es offenbar keine solche Zerlegung, also ist auch sie zusammenhängend. Sei nun $A \subseteq X$ eine Teilmenge mit mindestens zwei Elementen und $a \in A$. Laut Vorlesung ist jede Teilmenge von X offen und damit erst recht relativ offen in A . Daraus folgt, dass durch $U = \{a\}$ und $V = A \setminus \{a\}$ eine Zerlegung von A in disjunkte, nichtleere, in A relativ offene Teilmengen gegeben ist.

zu (b) Wäre $\{0, 1\}$ wegzusammenhängend in $\mathbb{R}$, dann gäbe es eine stetige Abbildung $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ mit $\gamma(0) = 0$, $\gamma(1) = 1$ und $\gamma(t) \in \{0, 1\}$ für alle $t \in [0, 1]$. Auf Grund des Zwischenwertsatzes müsste ein $t_0 \in]0, 1[$ mit $\gamma(t_0) = \frac{1}{2}$ existieren. Aber wegen $\frac{1}{2} \notin \{0, 1\}$ steht dies im Widerspruch zu $\gamma(t) \in \{0, 1\}$ für alle $t \in [0, 1]$.

zu (c) Man erhält die partielle Ableitung nach x , dem man y und z als Konstanten ansieht und nach x ableitet. Weil $\frac{y}{z}$ als konstanter Faktor angesehen werden kann und die Ableitung von x nach x gleich 1 ist, erhält man also $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z) = \frac{y}{z}$. Genauso findet man auch die Ableitungen $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z) = \frac{x}{z}$ und $\frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z) = -\frac{xy}{z^2}$.

zu (d) Man verwendet die Hilfsfunktion $\phi(t) = A + tE^{(2)}$. Die Funktion $\det \circ \phi$ ist dann gegeben durch

$$\begin{aligned} (\det \circ \phi)(t) &= \det(A + tE^{(2)}) = \det \begin{pmatrix} 1+t & 2 \\ 3 & 4+t \end{pmatrix} = (1+t)(4+t) - 2 \cdot 3 \\ &= 4 + 4t + t + t^2 - 6 = t^2 + 5t - 2 \end{aligned}$$

mit der Ableitung $(\det \circ \phi)'(t) = 2t + 5$. Es gilt also $\partial_{E^{(2)}} \det(A) = (\det \circ \phi)'(0) = 5$.

Aufgabe 1

zu (a) Seien $p, q \in A_1$ vorgegeben, mit $p = (x, y)$ und $q = (u, v)$. Zu zeigen ist, dass die Verbindungsstrecke $[p, q] = \{(1-t)p + tq \mid t \in [0, 1]\}$ ganz in A_1 enthalten ist. Für jedes $t \in [0, 1]$ gilt $(1-t)p + tq = ((1-t)x + tu, (1-t)y + tv)$. Wegen $p, q \in A_1$ gilt $x, u > 0$ und somit $(1-t)x + tu > 0$, weil die Zahlen $1-t$ und t beide ≥ 0 und mindestens eine der beiden positiv ist. Ebenso gilt $y, v > 0$ und somit $(1-t)y + tv > 0$. Insgesamt erhalten wir $(1-t)p + tq \in A_1$, und damit ist $[p, q] \subseteq A_1$ nachgewiesen.

Seien nun $p, q \in A_2$ vorgegeben, mit $p = (x, y)$ und $q = (u, v)$. Zu zeigen ist, dass $[p, q] = \{(1-t)p + tq \mid t \in [0, 1]\}$ ganz in A_2 liegt. Für jedes $t \in [0, 1]$ gilt $(1-t)p + tq = ((1-t)x + tu, (1-t)y + tv)$. Wegen $p, q \in A_2$ gilt $x, u < 0$ und somit $(1-t)x + tu < 0$. Aus $p, q \in A_2$ folgt außerdem $y, v > 0$ und somit $(1-t)y + tv > 0$. Insgesamt erhalten wir $(1-t)p + tq \in A_2$. Damit ist $[p, q] \subseteq A_2$ gezeigt.

zu (b) Die Abbildungen $\pi_1 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, (x, y) \mapsto x$ und $\pi_2 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, (x, y) \mapsto y$ sind stetig. Da $\mathbb{R}^+$ eine offene Teilmenge von $\mathbb{R}$ ist, sind $\pi_1^{-1}(\mathbb{R}^+)$ und $\pi_2^{-1}(\mathbb{R}^+)$ somit offene Teilmengen von $\mathbb{R}^2$. Es gilt $A_1 = \pi_1^{-1}(\mathbb{R}^+) \cap \pi_2^{-1}(\mathbb{R}^+)$ wegen

$$\begin{aligned}(x, y) \in \pi_1^{-1}(\mathbb{R}^+) \cap \pi_2^{-1}(\mathbb{R}^+) &\Leftrightarrow (x, y) \in \pi_1^{-1}(\mathbb{R}^+) \wedge \pi_2^{-1}(\mathbb{R}^+) \Leftrightarrow \\ \pi_1(x, y) \in \mathbb{R}^+ \wedge \pi_2(x, y) \in \mathbb{R}^+ &\Leftrightarrow x > 0 \wedge y > 0 \Leftrightarrow (x, y) \in A_1.\end{aligned}$$

Also ist A_1 als Durchschnitt zweier offener Mengen eine offene Teilmenge von $\mathbb{R}^2$. Wegen $A_1 \subseteq A$ gilt $A_1 = A \cap A_1$. Nach (2.65) ist A_1 somit auch relativ offen in A .

Die Menge $B_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x, y \geq 0\}$ ist abgeschlossen in $\mathbb{R}^2$. Denn $\mathbb{R}_+ = [0, +\infty[$ ist als abgeschlossenes Intervall eine abgeschlossene Teilmenge von $\mathbb{R}$, und auf Grund der Stetigkeit von π_1 und π_2 sind $\pi_1^{-1}(\mathbb{R}_+)$ und $\pi_2^{-1}(\mathbb{R}_+)$ abgeschlossene Teilmengen von $\mathbb{R}^2$. Wegen

$$\begin{aligned}(x, y) \in \pi_1^{-1}(\mathbb{R}_+) \cap \pi_2^{-1}(\mathbb{R}_+) &\Leftrightarrow (x, y) \in \pi_1^{-1}(\mathbb{R}_+) \wedge \pi_2^{-1}(\mathbb{R}_+) \Leftrightarrow \\ \pi_1(x, y) \in \mathbb{R}_+ \wedge \pi_2(x, y) \in \mathbb{R}_+ &\Leftrightarrow x \geq 0 \wedge y \geq 0 \Leftrightarrow (x, y) \in B_1\end{aligned}$$

gilt $B_1 = \pi_1^{-1}(\mathbb{R}_+) \cap \pi_2^{-1}(\mathbb{R}_+)$, also ist B_1 als Durchschnitt zweier abgeschlossener Teilmengen selbst eine abgeschlossene Teilmenge von $\mathbb{R}^2$. Offenbar gilt $B_1 \cap A_i = \emptyset$ für $i = 2, 3, 4$. Es folgt $B_1 \cap A = B_1 \cap (A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4) = A_1$, und dies zeigt, dass A_1 in A relativ abgeschlossen ist. (Alternativ könnte man auch argumentieren, dass A_2, A_3, A_4 wie A_1 relativ offen in A sind und somit A_1 als Komplement von $A_2 \cup A_3 \cup A_4$ in A relativ abgeschlossen.)

zu (c) Bei A_1 handelt es sich um eine von $\emptyset$ und von A verschiedene Teilmenge von A , die sowohl relativ offen als auch relativ abgeschlossen in A ist. Nach Prop. (6.2) folgt daraus, dass A nicht zusammenhängend ist.

Aufgabe 2

zu (a) Sei $(x^{(n)}, y^{(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{R}^2$, die gegen $(0, 0)$ konvergiert. Zu zeigen ist $\lim_n f(x^{(n)}, y^{(n)}) = f(0, 0) = 0$. Sei dazu $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ vorgegeben. Ist $n \in \mathbb{N}$ und $x^{(n)} \neq 0$, dann gilt

$$|f(x^{(n)}, y^{(n)})| = \frac{|(x^{(n)})^2 y^{(n)}|}{(x^{(n)})^2 + (y^{(n)})^2} = \frac{|y^{(n)}|}{1 + \left|\frac{x^{(n)}}{y^{(n)}}\right|^2} \leq |y^{(n)}|.$$

Ist $x^{(n)} = 0$, dann gilt $f(x^{(n)}, y^{(n)}) = 0$. Also ist in jedem Fall $|f(x^{(n)}, y^{(n)})| \leq |y^{(n)}|$ erfüllt.

Wegen $\lim_n (x^{(n)}, y^{(n)}) = (0, 0)$ gilt insbesondere $\lim_n y^{(n)} = 0$. Also existiert ein $N \in \mathbb{N}$ mit $|f(x^{(n)}, y^{(n)})| \leq |y^{(n)}| < \varepsilon$ für alle $n \geq N$. Damit ist $\lim_n f(x^{(n)}, y^{(n)}) = 0$ nachgewiesen.

zu (b) Sei $v = (a, b) \in \mathbb{R}^2$ vorgegeben und $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ die Hilfsfunktion $\phi(t) = (ta, tb)$. Zunächst setzen wir $v \neq (0, 0)$ voraus. Für jedes $t \neq 0$ ist

$$(f \circ \phi)(t) = f(ta, tb) = \frac{t^3 a^2 b}{t^2(a^2 + b^2)} = \frac{ta^2 b}{a^2 + b^2}.$$

Wegen $f(0, 0) = 0$ ist diese Gleichung auch für $t = 0$ gültig. Es folgt $(f \circ \phi)'(t) = \frac{a^2 b}{a^2 + b^2}$ für alle $t \in \mathbb{R}$ und somit $\partial_v f(0, 0) = (f \circ \phi)'(0) = \frac{a^2 b}{a^2 + b^2}$.

Ist $v = (0, 0)$, dann gilt $\phi(t) = (0, 0)$ für alle $t \in \mathbb{R}$ und somit $(f \circ \phi)(t) = f(0, 0) = 0$ für alle $t \in \mathbb{R}$. Es folgt $(f \circ \phi)'(t) = 0$ für alle $t \in \mathbb{R}$, also $\partial_v f(0, 0) = (f \circ \phi)'(0) = 0$.

Aufgabe 3

Seien $w, z \in \mathbb{C}$ beliebig vorgegeben und $w = u + iv$, $z = x + iy$ die Zerlegung in Real- und Imaginärteil. Sei $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ die Hilfsfunktion $\phi(t) = z + tw$. Dann gilt für alle $t \in \mathbb{R}$ jeweils

$$\begin{aligned}(f \circ \phi)(t) &= f(z + tw) = f((x + iy) + t(u + iv)) = f((x + tu) + i(y + tv)) \\ &= |(x + tu) + i(y + tv)|^2 = (x + tu)^2 + (y + tv)^2.\end{aligned}$$

Durch Anwendung der Kettenregel erhalten wir $(f \circ \phi)'(t) = 2u(x + tu) + 2v(y + tv)$ für alle $t \in \mathbb{R}$. Die Richtungsableitung ist also gegeben durch $\partial_w f(z) = (f \circ \phi)'(0) = 2ux + 2vy$.