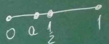
Blatt 9

Aufgabe 1

zu (a) geg. metrischer Raum (X,d), $\gamma : [0,1] \to X$
Abbildung, so dass $\gamma|[0,\frac{1}{2}]$, $\gamma|[\frac{1}{2},1]$ stetig.

z.zg.: γ ist stetig



Sei $a \in [0,1]$ z.zg.: γ ist stetig in a

Sei $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in $[0,1]$ mit $\lim_{n\to\infty} t_n = a$. z.zg.: $\lim_{n\to\infty} \gamma(t_n) = \gamma(a)$

1. Fall: $a \neq \frac{1}{2}$

Sei $\varepsilon = |a - \frac{1}{2}| \in \mathbb{R}^+$. Dann gibt es ein $N \in \mathbb{N}$ mit $|t_n - a| < \varepsilon \ \forall n \geq N$. Ist $a > \frac{1}{2}$, dann gilt also

$t_n > a - \varepsilon = a - (a - \frac{1}{2}) = \frac{1}{2} \quad \forall n \geq N \Rightarrow t_n \in [\frac{1}{2}, 1]$

$\forall n \geq N$ Da $\gamma|_{[\frac{1}{2},1]}$ stetig ist, folgt $\lim\limits_{n\to\infty} \gamma(t_n) =$

$\lim\limits_{n\to\infty} (\gamma|_{[\frac{1}{2},1]})(t_n) = (\gamma|_{[\frac{1}{2},1]})(a) = \gamma(a)$

Ist $a < \frac{1}{2}$, dann gilt $t_n < a + \varepsilon = a + \frac{1}{2} - a = \frac{1}{2} \quad \forall n \geq N$

$\Rightarrow t_n \in [0, \frac{1}{2}] \quad \forall n \geq N$ Auf Grund der Stetigkeit von

$\gamma|_{[0,\frac{1}{2}]}$ folgt $\lim\limits_{n\to\infty} \gamma(t_n) = \lim\limits_{n\to\infty} (\gamma|_{[0,\frac{1}{2}]})(t_n) =$

$(\gamma|_{[0,\frac{1}{2}]})(a) = \gamma(a)$

2. Fall. $a = \frac{1}{2}$ Sei $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ vorgeg. z.zg: $\exists \delta \in \mathbb{R}^+$

so dass $\forall t \in [0,1]: |t - \frac{1}{2}| < \delta \overset{(*)}{\Rightarrow} d(\gamma(\frac{1}{2}), \gamma(t)) < \varepsilon$

$\gamma|_{[0,\frac{1}{2}]}$ stetig $\Rightarrow \exists \delta_1 \in \mathbb{R}^+ : \forall t \in [0, \frac{1}{2}]:$

$|t - \frac{1}{2}| < \delta_1 \underset{(*1)}{\Rightarrow} d(\gamma(\frac{1}{2}), \gamma(t)) < \varepsilon$

$\gamma|[\frac{1}{2},1]$ stetig $\overset{(*_2)}{\Rightarrow} \exists \delta_2 \in \mathbb{R}^+ . \ \forall t \in [\frac{1}{2},1]:$

$$|t-\tfrac{1}{2}|<\delta_2 \Rightarrow d(\gamma(\tfrac{1}{2}),\gamma(t))<\varepsilon$$

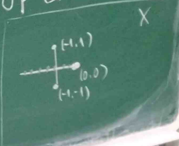
Sei $\delta = \min\{\delta_1,\delta_2\}$. Beh.: Dann gilt $(*)$.

Sei $t\in[0,1]$ mit $|t-\frac{1}{2}|<\delta \Rightarrow |t-\frac{1}{2}|<\delta_1$ und $|t-\frac{1}{2}|<\delta_2$

Ist $t\le \frac{1}{2}$, dann folgt $d(\gamma(\frac{1}{2}),\gamma(t))<\varepsilon$ aus $(*_1)$

Ist $t\ge\frac{1}{2}$, dann folgt $d(\gamma(\frac{1}{2}),\gamma(t))<\varepsilon$ aus $(*_2)$.

<u>zu (b)</u> z.zg.: $X=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x\ge 0$ oder $y\ne 0\}$ ist nicht konvex



$\mathbb{R}^2\setminus X = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x<0$ und $y=0\}$. Dann ist

Sei $p=(-1,-1)$, $q=(-1,1)$.

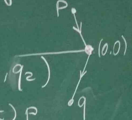
$[p,q] = \{(1-t)p+tq \mid t\in[0,1]\}$

$= \{(-1,2t-1) \mid t\in[0,1]\}$

Setzt man $t = \frac{1}{2}$, so erhält man $(-1,0) \in [p,q]$

aber: $(-1,0) \notin X$ also: $[p,q] \not\subseteq X$, X nicht konvex

<u>zu (c)</u> z.zg.: X ist wegzshgd., d.h. für bel. vorgeg. $p, q \in X$ existiert eine stetige Abb. $\gamma : [0,1] \to X$ mit $\gamma(0) = p$, $\gamma(1) = q$



Seien $p, q \in X$ vorgeg., $p = (p_1, p_2)$, $q = (q_1, q_2)$

Definiere $\gamma_1 : [0, \frac{1}{2}] \to \mathbb{R}^2$, $t \mapsto (1-2t)p$.

Es gilt $\gamma_1(0) = p$, $\gamma_1(\frac{1}{2}) = (0,0)$ und γ_1 ist stetig, weil die Komponenten $t \mapsto (1-2t)p_1$, $t \mapsto (1-2t)p_2$ als Polynomfkt. stetig sind.

Ebenso überprüft man, dass $\gamma_2 : [\frac{1}{2}, 1] \to \mathbb{R}^2, t \mapsto (2t-1)q$
die Gleichungen $\gamma_2(\frac{1}{2}) = 0$, $\gamma_2(1) = q$ erfüllt und
stetig ist.

Definiere nun $\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^2, t \mapsto \begin{cases} \gamma_1(t) & \text{für } t \in [0, \frac{1}{2}] \\ \gamma_2(t) & \text{für } t \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$

Dann gilt $\gamma|_{[0,\frac{1}{2}]} = \gamma_1$, $\gamma|_{[\frac{1}{2},1]} = \gamma_2$, und nach Teil (a)
ist γ stetig. γ ist stetige Abb. $[0,1] \to \mathbb{R}^2$ mit $\gamma(0) = \gamma_1(0) = p$
und $\gamma(1) = \gamma_2(1) = q$. noch zu überprüfen: $\gamma([0,1]) \subseteq X$
genügt: $\gamma_1([0,\frac{1}{2}]) \subseteq X$ und $\gamma_2([0,\frac{1}{2}]) \subseteq X$
klar: $\gamma_1(0) = p \in X$, $\gamma_1(\frac{1}{2}) = (0,0) \in X$. Sei nun $t \in]0, \frac{1}{2}[$.
$p \in X \Rightarrow p_1 \geq 0$ oder $p_2 \neq 0$
z.zg.: $\gamma_1(t) = (1-2t)(p_1, p_2) \in X$

$t \in]0, \frac{1}{2}[\Rightarrow 1-2t \in \mathbb{R}^+$

Ist $p_1 \geq 0$, dann folgt $(1-2t)p_1 \geq 0$, also $\gamma_1(t) \in X$

Ist $p_2 \neq 0$, dann folgt $(1-2t)p_2 \neq 0$, also $\gamma_1(t) \in X$.

Also gilt $\gamma_1(t) \in X$ in jedem Fall

Insgesamt ist damit $\gamma_1([0, \frac{1}{2}]) \subseteq X$. Der Nachweis von $\gamma_2([\frac{1}{2}, 1]) \subseteq X$ läuft analog. □

Aufgabe 2

geg.: $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R},\ (x,y)\mapsto \begin{cases}\frac{x^3+y^3}{|x|+|y|} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$

zu (a) gesucht: $\partial_1 f(x,y)$ für $(x,y)\in U$,

wobei $U=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x<0,\ y>0\}$

Die Menge U ist offen, denn es ist $U \overset{(*)}{=} \pi_1^{-1}(]-\infty,0[)$
$\cap\ \pi_2^{-1}(]0,+\infty[)$ mit den Abb. $\pi_1(x,y)=x$, $\pi_2(x,y)=$
y, denn $]-\infty,0[$, $]0,+\infty[$ sind offen in $\mathbb{R}$, π_1,π_2
sind stetig. Somit $\pi_1^{-1}(]-\infty,0[)$, $\pi_2^{-1}(]0,+\infty[)$ offen,
ebenso U als deren Durchschnitt. Überprüfung von $(*)$:

$(x,y)\in\pi_1^{-1}(]-\infty,0[)\cap\pi_2^{-1}(]0,+\infty[) \Leftrightarrow$
$\pi_1(x,y)\in\ ]-\infty,0[$ und $\pi_2(x,y)\in\ ]0,+\infty[\ \Leftrightarrow x<0$ und $y>0$

$\Longrightarrow (x,y) \in U$

Für alle $(x,y) \in U$ gilt $(f|U)(x,y) = \dfrac{x^3+y^3}{y-x}$

Weil U offen ist, gilt für alle $(x,y) \in U$:

$$\partial_1 f(x,y) \overset{!}{=} (\partial_1(f|U))(x,y) = \partial_1\left(\frac{x^3+y^3}{y-x}\right)$$

$$= \frac{3x^2(y-x)-(x^3+y^3)(-1)}{(y-x)^2} = \frac{-2x^3+y^3+3x^2y}{(y-x)^2}$$

zu (b) gesucht: $\partial_1 f(0,0)$

Sei $\phi_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $t \mapsto te_1 = (t,0)$

Nach Def. gilt $\partial_1 f(0,0) = (f \circ \phi_1)'(0)$, sofern die Ableitung existiert

$(f\circ\phi_v)'(0) = 0.$

Aufgabe 2 geg.: $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, (x,y) \mapsto \begin{cases} \frac{x^3+y^3}{|x|+|y|} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$

Sei $t \in \mathbb{R}$. Für $t > 0$ gilt $(f\circ\phi_1)(t) = f(t,0) = \frac{t^3}{t} = t^2$

für $t < 0$ ist $(f\circ\phi_1)(t) = f(0,t) = \frac{t^3}{(-t)} = -t^2$

außerdem $(f\circ\phi_1)(0) = f(0,0) = 0$

Insgesamt gilt also $(f\circ\phi_1)(t) = t|t| \;\forall t \in \mathbb{R}$.

Untersuche die Diff'barkeit dieser Fkt. im Nullpunkt

$$\lim_{t\to 0} \frac{(f\circ\phi_1)(t) - (f\circ\phi_1)(0)}{t - 0} = \lim_{t\to 0} \frac{t|t|}{t} = \lim_{t\to 0} |t|$$

$= 0$ (auf Grund der Stetigkeit der Betragsfunktion.)

$\Rightarrow \partial_1 f(0,0)$ existiert, $\partial_1 f(0,0) = (f\circ\phi_1)'(0) = 0.$

zu (c) ges: $\partial_v f(0,0)$ für $v=(1,1)$

Definiere $\phi_v : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $t \mapsto tv = (t,t)$

Sei $t \in \mathbb{R}$. Ist $t > 0$, dann ist $(f\circ\phi_v)(t) = f(t,t)$

$= \dfrac{t^3+t^3}{t+t} = \dfrac{2t^3}{2t} = t^2$. Ist $t<0$, dann ist $(f\circ\phi_v)(t) =$

$f(t,t) = \dfrac{t^3+t^3}{(-t)+(-t)} = \dfrac{2t^3}{(-2t)} = -t^2$, außerdem $(f\circ\phi_v)(0) =$

$f(0,0) = 0 \Rightarrow (f\circ\phi_v)(t) = t|t| \ \forall t \in \mathbb{R}$.

Aus Teil (b) ist bekannt, dass diese Fkt. im Null-punkt die Ableitung 0 hat. Also gilt $\partial_v f(0,0) =$

$(f\circ\phi_v)'(0) = 0$.

zu (d) z.zg.: $\partial_2 f(1,0)$ existiert nicht

$$f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ (x,y) \mapsto \begin{cases} \frac{x^3+y^3}{|x|+|y|} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Definiere $\phi: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2,\ t \mapsto (1,0) + t e_2 = (1,t)$.

Sei $t \in \mathbb{R}$. Ist $t > 0$, dann gilt $(f \circ \phi)(t) = f(1,t) = \frac{1+t^3}{1+t}$. Ist $t < 0$, dann gilt $(f \circ \phi)(t) = f(1,t) = \frac{1+t^3}{1-t}$, außerdem $(f \circ \phi)(0) = f(1,0) = \frac{1^3+0^3}{1+0} = 1$

Also gilt $(f \circ \phi)(t) = \frac{1+t^3}{1+|t|}$ für alle $t \in \mathbb{R}$

z.zg.: $\lim\limits_{t \to 0} \frac{(f \circ \phi)(t) - (f \circ \phi)(0)}{t - 0} = \lim\limits_{t \to 0} \frac{\frac{1+t^3}{1+|t|} - 1}{t}$ existiert nicht

Ang., der Grenzwert existiert. Dann gibt es ein $c \in \mathbb{R}$ so dass $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\frac{1+t_n^3}{1+|t_n|}-1}{t_n} = c$ für jede Folge $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ mit $\lim\limits_{n\to\infty} t_n = 0$.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1+\frac{1}{n^3}}{1+\frac{1}{n}}-1}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} n\cdot\left(\frac{1+\frac{1}{n^3}}{1+\frac{1}{n}}-1\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+\frac{1}{n^2}}{1+\frac{1}{n}}-n\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^3+1}{n^2+n}-n\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{n^3+1-n(n^2+n)}{n^2+n} = \lim_{n\to\infty}\frac{-n^2+1}{n^2+n}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{-1+\frac{1}{n^2}}{1+\frac{1}{n}} = \frac{(-1)}{1} = -1$$

Es müsste also $c=1$ gelten

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^3+1}{\dots} - n\right) = \lim \frac{n^3+1-n(n^2+n)}{\dots} = \lim \frac{-n^2+1}{\dots}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1+\left(-\frac{1}{n}\right)^3}{1+\frac{1}{n}} - 1}{\left(-\frac{1}{n}\right)}$$

$$f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ (x,y) \mapsto \begin{cases} \frac{x^3+y^3}{|x|+|y|} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

$$= \lim_{n\to\infty} (-n)\left(\frac{1-\frac{1}{n^3}}{1+\frac{1}{n}} - 1\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{\frac{1}{n^2}-n}{1+\frac{1}{n}} + n\right) =$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1-n^3}{n^2+n} + n\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{1-n^3+n(n^2+n)}{n^2+n} =$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2-1}{n^2+n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1-\frac{1}{n^2}}{1+\frac{1}{n}} = \frac{1}{1} = 1$$

$\Longrightarrow c = 1$ insgesamt: $-1 = c = 1$ ↯ Also existiert der Grenzwert nicht.