Analysis mehrerer Variablen (LA Gym)

— **Lösung Blatt 9** —

(Globalübungsblatt)

Aufgabe 3

zu (a) Sei $z = x + iy$, $w = u + iv$ mit $x, y, u, v \in \mathbb{R}$, und sei $\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ gegeben durch $\psi(t) = z + tw$. Nach Definition existiert $\partial_w f(z)$ genau dann, wenn die Funktion

$$(f \circ \psi)(t) \quad = \quad f(z + tw) \quad = \quad |z + tw| \quad = \quad |(x + iy) + t(u + iv)| \quad = \quad \sqrt{(x + tu)^2 + (y + tv)^2}$$

im Nullpunkt differenzierbar ist. Die Funktion $g(t) = (x + tu)^2 + (y + tv)^2$ ist als Polynomfunktion auf ganz $\mathbb{R}$ und insbesondere im Nullpunkt differenzierbar. Wegen $z \neq 0$ ist $(x, y) \neq (0, 0)$ und damit auch $g(0) = x^2 + y^2 > 0$. Da g in 0 stetig ist, gibt es ein $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$, so dass $g(t) \in \mathbb{R}^+$ für alle $t \in \mathbb{R}$ mit $|t| < \varepsilon$ gilt. Die Wurzelfunktion ist auf ganz $\mathbb{R}^+$ differenzierbar. Durch Anwendung der (eindimensionalen) Kettenregel erhalten wir nun die Differenzierbarkeit der Funktion $(f \circ \psi)(t) = \sqrt{g(t)}$ im Nullpunkt.

zu (b) Wieder sei $w = u + iv$ mit $u, v \in \mathbb{R}$, wobei wir diesmal $w \neq 0$, also $(u, v) \neq (0, 0)$ voraussetzen. Nehmen wir an, dass $\partial_w f(0)$ existiert. Dann ist $f \circ \psi$ mit der Hilfsfunktion $\psi(t) = tw$ im Nullpunkt differenzierbar. Für alle $t \in \mathbb{R}$ gilt $(f \circ \psi)(t) = f(tw) = |tw| = |w||t|$. Aus der Analysis einer Variablen ist bekannt, dass die Betragsfunktion im Nullpunkt nicht differenzibar ist. Daraus folgt, dass auch $(f \circ \psi)$ in 0 nicht differenzierbar ist, denn ansonsten würden wir wegen $|t| = \frac{1}{|w|}(f \circ \psi)(t)$ die Differenzierbarkeit der Betragsfunktion im Nullpunkt erhalten.