Analysis mehrerer Variablen

— Lösung Blatt 8 —

(Tutoriumsblatt)

Aufgabe 0

zu (a) Wählen wir als metrischen Raum $\mathbb{R}$ mit der Standardmetrik und setzen wir $Y = [0,1]$ und $A = [0,1[$, dann ist A in $\mathbb{R}$ nicht offen, weil $B_\varepsilon(0) \subseteq A$ für kein $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ erfüllt ist; zum Beispiel liegt jeweils $-\frac{1}{2}\varepsilon$ in $B_\varepsilon(0)$, aber nicht in A. Wegen $A =]-1,1[\cap Y$ und der Offenheit von $]-1,1[$ in $\mathbb{R}$ ist A aber relativ offen in Y, nach Satz (7.22).

zu (b) Ja, das ist richtig. Wegen $A \subseteq Y$ gilt dann nämlich $A = Y \cap A$, und jeder Durchschnitt von Y mit einer in X offenen Mengen ist nach Satz (7.22) relativ offen in Y.

zu (c) Nach dem Satz von Heine-Borel aus der Vorlesung ist $[0,1]$ in $(\mathbb{R}, d)$ kompakt, ebenso jede abgeschlossene Teilmenge von $[0,1]$. Andererseits muss jede kompakte Teilmenge von $\mathbb{R}$ abgeschlossen (und beschränkt) sein. Also sind die kompakten Teilmengen von $[0,1]$ genau die in $\mathbb{R}$ abgeschlossenen Teilmengen dieser Menge.

zu (d) Laut Vorlesung sind die kompakten Teilmengen von $\mathbb{R}$ genau die beschränkten und abgeschlossenen Teilmengen. Es ist auch leicht zu sehen, dass die kompakten Teilmengen von $\mathbb{N}$ genau die endlichen Teilmengen sind. Denn einerseits ist laut Vorlesung jede endliche Teilmengen eines metrischen Raums kompakt. Ist $T \subseteq \mathbb{N}$ andererseits unendlich, dann bilden die Menge $\{t\}$ eine offene Überdeckung von T, die keine endliche Teilüberdeckung besitzt. (Jede Menge der Form $\{t\}$ ist relativ offen in $\mathbb{N}$, da man sie zum Beispiel in der Form $\mathbb{N} \cap \left]t - \frac{1}{2}, t + \frac{1}{2}\right[$ darstellen kann, so dass die relative Offenheit aus Satz (7.22) folgt.)

Die Menge $[1,2] \cap \mathbb{Q}$ ist *keine* kompakte Teilmenge von $\mathbb{Q}$. Denn wegen $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ bilden die Mengen $U_n = \left(\left]0, \sqrt{2} - \frac{1}{n}\right[\cup \left]\sqrt{2} + \frac{1}{n}, 3\right[\right) \cap \mathbb{Q}$ mit $n \in \mathbb{N}$ einerseits eine offene Überdeckung von $[1,2] \cap \mathbb{Q}$. Andererseits gibt es aber keine endliche Teilüberdeckung. Denn nehmen wir an, $(U_n)_{n \in J}$ mit einer endlichen Teilmenge $J \subseteq \mathbb{N}$ wäre eine solche Überdeckung, mit $m = \max J$. Dann ist das Intervall $[\sqrt{2} - \frac{1}{m}, \sqrt{2} + \frac{1}{m}]$ zu $\bigcup_{k=1}^m U_k$ disjunkt. Wählen wir also eine beliebige rationale Zahl $r \in [\sqrt{2} - \frac{1}{m}, \sqrt{2} + \frac{1}{m}]$, so ist diese zwar in $[1,2] \cap \mathbb{Q}$, aber nicht in $\bigcup_{k=1}^m U_k$ enthalten.

Aufgabe 1

zu (a) Sei $a = (-\frac{1}{2}, 0)$. Dann gilt $d_X((0,0), a) = \|a - (0,0)\|_\infty = \|(-\frac{1}{2}, 0)\|\infty = \frac{1}{2} < 1$, somit liegt a in $B_{1,X}(a)$. Wegen $-\frac{1}{2} < 0$ liegt a aber nicht in Y, also erst recht nicht im offenen Ball $B_{1,Y}(a)$, der ja nach Definition eine Teilmenge von Y ist.

zu (b) Der Punkt $b = (0,0)$ ist in U enthalten. Wäre U offen, dann müsste für ein geeignetes $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ der offene Ball $B_{\varepsilon,X}(b)$ vollständig in U liegen. Ist aber $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ vorgegeben, dann liegt der Punkt $a_\varepsilon = (-\frac{1}{2}\varepsilon, 0)$ wegen $\|a_\varepsilon - b\|_\infty = \|(-\frac{1}{2}\varepsilon, 0)\|_\infty = \frac{1}{2}\varepsilon < \varepsilon$ in $B_{\varepsilon,X}(b)$, aber wegen $-\frac{1}{2}\varepsilon < 0$ nicht in U. Also ist $B_{\varepsilon,X}(b) \subseteq U$ für kein $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ erfüllt.

zu (c) Sei $c \in U$ beliebig vorgegeben. Wir müssen zeigen, dass ein $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ mit $B_{\varepsilon,Y}(c) \subseteq U$ existiert. Ist $c = (x,y)$, dann gilt $0 \leq x < 1$ und $-1 < y < 1$ wegen $(x,y) \in U$. Sei nun $\varepsilon = \min\{1-x, y+1, 1-y\}$. Ist nun $c_1 = (x_1, y_1) \in B_{\varepsilon,Y}(c)$, dann liegt c_1 insbesondere in Y, und folglich gilt $x_1 \geq 0$. Aus $|x_1 - x| < \varepsilon$

folgt außerdem $x_1 < x + \varepsilon \leq x + (1 - x) = 1$. Aus $|y_1 - y| < \varepsilon$ folgt $y_1 > y - \varepsilon \geq y - (y + 1) = -1$ und $y_1 < y + \varepsilon \leq y + (1 - y) = 1$. Insgesamt gilt also $0 \leq x_1 < 1$, $-1 < y_1 < 1$ und damit $(x_1, y_1) \in U$. Damit ist $B_{\varepsilon,Y}(c) \subseteq U$ nachgewiesen.

Aufgabe 2

zu (a) Jeder Punkt $p \in A$ hat die Form $p = (n, 0)$ für ein $n \in \mathbb{Z}$. Ist $n \geq 4$, dann gilt $p \in U_1$. Im Fall $n \leq -1$ liegt p in U_2. Ansonsten liegt n in $\{0, 1, 2, 3\}$, und in diesem Fall liegt p in $U_{n+3} = B_1((n, 0))$ wegen $\|p - (n, 0)\|_\infty = \|(0, 0)\|_\infty = 0 < 1$.

zu (b) Nein. Um zu zeigen, dass A kompakt ist, müsste in *jeder* offenen Überdeckung von A eine endliche Teilüberdeckung gefunden werden, nicht nur in der vorgegebenen Überdeckung $(U_i)_{i \in I}$.

zu (c) Wäre A kompakt, dann wäre A nach dem Satz von Heine-Borel als Teilmenge von $\mathbb{R}^2$ beschränkt und abgeschlossen. Wäre A beschränkt, dann gäbe es ein $r \in \mathbb{R}^+$ mit $A \subseteq B_r((0, 0))$. Ist aber $r \in \mathbb{R}^+$ beliebig vorgegeben, dann gibt ein ein $n \in \mathbb{N}$ mit $n > r$. Der Punkt $(n, 0) \in A$ ist aber nicht in $B_r((0, 0))$ enthalten, denn es gilt $\|(n, 0) - (0, 0)\|_\infty = n > r$.

Aufgabe 3

zu (a) Sei a eine untere und b eine obere Schranke der Folge. Dann gilt also $a \leq x_n \leq b$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Nach Satz (5.7) ist $[a, b]$ kompakt. Wir können also Satz (5.11) auf den kompakten metrischen Raum $[a, b]$ mit der Standardmetrik d gegeben durch $d(x, y) = |x - y|$ für alle $x, y \in [a, b]$ anwenden. Auf Grund des Satzes besitzt $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine in $([a, b], d)$ konvergente Teilfolge. (Der Grenzwert ist zugleich auch ein Grenzwert der Folge im Sinne der Analysis einer Variablen.)

zu (b) Sei $H \subseteq \mathbb{R}$ die Menge der Häufungspunkte der Folge in $\mathbb{R}$. Wir zeigen, dass das Komplement $U = \mathbb{R} \setminus H$ in $\mathbb{R}$ offen ist. Sei $x \in U$ beliebig vorgegeben. Da x kein Häufungspunkt der Folge ist, gibt es ein $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$, so dass nur endlich viele $n \in \mathbb{N}$ mit $x_n \in B_\varepsilon(x)$ existieren. Kein Punkt $y \in B_\varepsilon(x)$ ist Häufungspunkt der Folge. Denn auf Grund der Offenheit von $B_\varepsilon(x)$ existiert nämlich ein $\varepsilon' \in \mathbb{R}^+$ mit $B'_\varepsilon(y) \subseteq B_\varepsilon(x)$. Wäre y ein Häufungspunkt, dann gäbe es unendlich viele $n \in \mathbb{N}$ mit $x_n \in B'_\varepsilon(y)$, und diese Folgenglieder würden alle in $B_\varepsilon(x)$ liegen, im Widerspruch zur Feststellung von oben. So aber ist $B_\varepsilon(x)$ in U enthalten, wodurch die Offenheit von U nachgewiesen ist.

zu (c) Da die Menge H der Häufungspunkte der Folge ist nach Teil (a) nichtleer. Außerdem ist sie beschränkt, denn $x \in \mathbb{R} \setminus [a, b]$ ist Häufungspunkt. Ist nämlich $x > b$ und $\varepsilon = x - b$, dann existieren keine Folgenglieder in $B_\varepsilon(x)$; ist dagegen $x < a$ und $\varepsilon = a - x$, dann gibt es keine Folgenglieder in $B_\varepsilon(x)$, geschweige denn unendlich viele. Daraus folgt, dass $\inf(H)$ und $\sup(H)$ als reelle Zahlen existieren.

Nach Definition des Supremums existiert für jedes $n \in \mathbb{N}$ ein Häufungspunkt h_n mit $\sup(H) - \frac{1}{n} < h_n \leq \sup(H)$. Die Folge $(h_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist dann in H enthalten, und auf Grund des Sandwich-Lemmas konvergiert sie gegen $\sup(H)$. Da H nach Teil (b) abgeschlossen ist, ist nach Satz (4.16) auch $\sup(H)$ in H enthalten. Dies zeigt, dass $\sup(H)$ der größte Häufungspunkt der Folge ist. Der Nachweis, dass $\inf(H)$ der kleinste Häufungspunkt der Folge ist, läuft analog.