Aufgabe 1

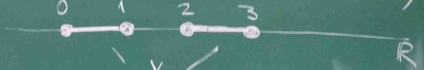
Wdh (X, d) metrischer Raum, $Y \subseteq X$ Teilmenge

- $U \subseteq X$ offen $\Leftrightarrow \forall x \in U : \exists \varepsilon \in \mathbb{R}^+ : B_\varepsilon(x) \subseteq U$
- $U \subseteq X$ abgeschlossen $\Leftrightarrow X \setminus U$ ist offen
- $U \subseteq Y$ relativ offen in Y $\Leftrightarrow$ U offen im metrischen Raum (Y, d_Y), wobei $d_Y = d|_{Y \times Y}$ $\overset{\text{Satz (4.22)}}{\Longleftrightarrow}$ $\exists\, \tilde{U} \subseteq X$ offen, so dass $U = \tilde{U} \cap Y$
- $U \subseteq Y$ relativ abgeschlossen in Y $\Leftrightarrow$ U abgeschlossen in (Y, d_Y) $\overset{\text{Satz (4.22)}}{\Longleftrightarrow}$ $\exists\, \tilde{U} \subseteq X$ abgeschlossen mit $U = \tilde{U} \cap Y$

Also ist U_3 nicht rel. abgeschlossen in X.

hier: $(\mathbb{R}, d)$, wobei d Standardmetrik ($d(x,y) = |x-y|$)

$X = [0,1] \cup [2,3]$



zu (a) $U_1 = [0,1]$, $U_2 = [0,1] \cup [2,3]$, $U_3 = [0,1[\cup]2,3]$

Frage: Welche dieser Mengen ist rel. offen / rel. abgeschlossen in X?

zu U_1: Sei $\tilde{U} =]-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}[$. diese Menge ist offen (als offenes Intervall), und es gilt $U_1 = \tilde{U} \cap X$, denn für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt: $x \in \tilde{U} \cap X \iff x \in \tilde{U}$ und $x \in X$

$\iff -\frac{1}{2} < x < \frac{3}{2}$ und $(0 \le x \le 1$ oder $2 \le x \le 3)$

$\iff 0 \le x \le 1 \iff x \in U_1$. $\overset{(4.22)}{\Longrightarrow}$ U_1 ist rel. offen

U_1 ist abgeschlossen in $(\mathbb{R}, d)$ (als abg. Intervall), und wegen $U_1 \subseteq X$ gilt $U_1 = U_1 \cap X \overset{(4.22)}{\Longrightarrow}$ U_1 ist relativ abgeschlossen in X

Es ist $U_2 = X$. Deshalb ist U_2 sowohl rel. offen als auch rel. abgeschlossen in X. (In jedem metrischen Raum (X, d) ist X offen und abgeschlossen.)

zu U_3 Ang. U_3 ist relativ abgeschlossen in X. Dann wäre $X \setminus U_3 = \{1, 2\}$ relativ offen. Es gäbe dann z.B. ein $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ mit $B_\varepsilon(1) \subseteq \{1, 2\}$. Aber dies ist nicht der Fall, da z.B. $1 - \frac{1}{2}\varepsilon \in B_\varepsilon(1)$, $1 - \frac{1}{2}\varepsilon \notin \{1, 2\}$.

Also ist U_3 nicht rel. abgeschlossen in X.

Sei $\tilde{V} =]-1,1[\cup]2,4[$. Als offene Intervalle sind $]-1,1[$, $]2,4[$ offen, somit auch $\tilde{V}$.

Beh: $U_3 = \tilde{V} \cap X$. Sei $x \in \mathbb{R}$. Dann gilt die Äquivalenz $x \in \tilde{V} \cap X \Leftrightarrow x \in \tilde{V}$ und $x \in X \Leftrightarrow$

$(-1 < x < 1$ oder $2 < x < 4)$ und $(0 \leq x \leq 1$ oder $2 \leq x \leq 3) \Leftrightarrow$

$(-1 < x < 1$ und $0 \leq x \leq 1)$ oder $(2 < x < 4$ und $2 \leq x \leq 3) \Leftrightarrow$

$0 \leq x < 1$ oder $2 < x \leq 3 \Leftrightarrow x \in U_3$ ($\Rightarrow$ Beh)

Also ist U_3 relativ offen in X, nach Satz (4.22).

zu (b) gesucht: Teilmengen $\emptyset \subsetneq U, V \subsetneq X$, wobei U rel offen und rel abg in X, V weder rel offen noch rel abg in X

Setze $U = U_1$ oben gezeigt: U_1 ist rel offen und rel. abg in X, außerdem $U_1 \neq \emptyset$ wg $0 \in U_1$, $U_1 \neq X$ wg $2 \in X \setminus U_1$

Beh: $V = [\frac{1}{4}, \frac{1}{2}[$ ist weder rel offen noch rel abg in X

Ang. V rel offen. Dann gäbe es ein $\varepsilon < \frac{1}{4}$ mit $B_{\varepsilon, X}(\frac{1}{4}) \subseteq V$

(wobei $B_{\varepsilon, X}(\frac{1}{4}) = \{ x \in X \mid d(\frac{1}{4}, x) < \varepsilon \}$)

aber: $B_{\varepsilon, X}(\frac{1}{4}) \nsubseteq V$ wg $\frac{1}{4} - \frac{1}{2}\varepsilon \in B_{\varepsilon, X}(\frac{1}{4})$ wg

$0 < \frac{1}{4} - \frac{1}{2}\varepsilon < \frac{1}{4} < 1 \Rightarrow \frac{1}{4} - \frac{1}{2}\varepsilon \in [0, 1] \subseteq X$ und $\frac{1}{4} - \frac{1}{2}\varepsilon \notin V$ ↯

und $d(\frac{1}{4}, \frac{1}{4} - \frac{1}{2}\varepsilon) = \frac{1}{2}\varepsilon < \varepsilon$

Ang. V ist rel. abg. Dann wäre $V_1 = X \setminus V = [0, \frac{1}{4}[\cup [\frac{1}{2}, 1] \cup [2, 3]$ rel. offen in X. Dann gäbe es ein $\varepsilon < \frac{1}{4}$ mit $B_{\varepsilon, X}(\frac{1}{2}) \subseteq V_1$

aber: $\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\varepsilon \in B_{\varepsilon, X}(\frac{1}{2})$ wg. $\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\varepsilon > \frac{3}{8} > 0$, $\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\varepsilon < 1$

$\Rightarrow \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\varepsilon \in [0, 1] \subseteq X$ und $d(\frac{1}{2}, \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\varepsilon) = \frac{1}{2}\varepsilon < \varepsilon$ und

$\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\varepsilon \notin V$ also: $B_{\varepsilon, X}(\frac{1}{2}) \not\subseteq V_1$ ↯ $\square$

Aufgabe 3

Wdh. (X, d) metrischer Raum $A \subseteq X$ kompakt $\Leftrightarrow$

Für jede offene Überdeckung $(U_i)_{i \in I}$ von A gibt es eine endliche Teilmenge $J \subseteq I$, so dass $(U_i)_{i \in J}$ offene Überdeckung von A ist.

Sei (X,d) ein metrischer Raum, $A_1, \dots, A_r$ kompakte Teilmengen. z.zg.: $A = A_1 \cup \dots \cup A_r$ ist kompakt

Sei $(U_i)_{i \in I}$ eine offene Überdeckung von A.

z.zg.: $\exists$ endl. Teilm. $J \subseteq I$, so dass $(U_i)_{i \in J}$ offene Überd. von A.

Sei $k \in \{1, \dots, r\}$. A_k ist kompakt, und $(U_i)_{i \in I}$ ist offene Überd. von A_k wg. $\bigcup_{i \in I} U_i \supseteq A \supseteq A_k$ $\Rightarrow$ Es gibt eine endl. Teilmenge $J_k \subseteq I$, so dass $(U_i)_{i \in J_k}$ offene Überd. von A_k.

Sei $J = J_1 \cup \dots \cup J_r$. Dann ist auch J endlich und $(U_i)_{i \in J}$ ist endl. offene Überd. von A wegen $\bigcup_{i \in J} U_i = \dot{\bigcup_{k=1}^{r}} \bigcup_{i \in J_k} U_i \supseteq \dot{\bigcup_{k=1}^{r}} A_k = A$ $\square$

Aufgabe 2

zu (a) z.zg.: $T = \{(-1)^n(1-\frac{1}{n}) \mid n \in \mathbb{N}\}$ ist keine kompakte Teilmenge von $\mathbb{R}$.

Ang. T ist kompakt. Dann wäre T nach dem Satz (5.14) von Heine-Borel insb. abgeschlossen in $\mathbb{R}$. Jede Folge in T, die in $\mathbb{R}$ konvergiert, müsste demnach ihren Grenzwert in T haben. Betrachte die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ geg. durch $a_n = 1 - \frac{1}{2n}$.

Es gilt $a_n = (-1)^{2n}(1-\frac{1}{2n}) \in T \ \forall n \in \mathbb{N}$, und $\lim_{n\to\infty} a_n = 1$.

Es gilt aber $1 \notin T$ wg. $|(-1)^n(1-\frac{1}{n})| = 1 - \frac{1}{n} < 1 \ \forall n \in \mathbb{N}$.

$\Rightarrow$ T ist nicht abg., somit auch nicht kompakt.

alternativer Lösungsweg: zeige, dass $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ geg. durch

$U_n = \left]-1+\frac{1}{2n}, 1-\frac{1}{2n}\right[$ eine offene Überdeckung von T ist, die aber keine endl. Teilüberd. besitzt.

<u>zu (b)</u> z.zg: $T \cup \{-1, 1\}$ ist kompakte Teilmenge von $\mathbb{R}$

<u>1. Möglichkeit</u>: Verwende Prop (5.5) und Aufgabe 3.

<u>2. Möglichkeit</u>: Arbeite direkt mit der Definition.

Sei $(U_i)_{i \in I}$ eine offene Überd. von $T \cup \{-1, 1\}$. z.zg: $\exists$ endl. Teilmenge $J \subseteq I$, so dass $(U_i)_{i \in J}$ offene Überd. von $T \cup \{-1, 1\}$

Wg. $\bigcup_{i \in I} U_i \supseteq T \cup \{-1, 1\}$ gibt es $i_0, j_0 \in I$ mit $-1 \in U_{i_0}$ und $1 \in U_{j_0}$. U_{i_0}, U_{j_0} offen $\Rightarrow \exists\, \varepsilon \in \mathbb{R}^+$ mit $B_\varepsilon(-1) \subseteq U_{i_0}$, $B_\varepsilon(1) \subseteq U_{j_0}$.

Sei $N \in \mathbb{N}$ mit $N > \varepsilon^{-1}$.

<u>Beh.</u> $(-1)^n(1-\frac{1}{n}) \in U_{i_0} \cup U_{j_0} \quad \forall n \geq N$

Sei $n \in \mathbb{N}, n \geq N$. <u>1. Fall:</u> n gerade $\Rightarrow |(-1)^n(1-\frac{1}{n}) - 1|$
$= |(1-\frac{1}{n}) - 1| = \frac{1}{n} \leq \frac{1}{N} < \varepsilon \Rightarrow (-1)^n(1-\frac{1}{n}) \in B_\varepsilon(1) \subseteq$
$U_{j_0} \subseteq U_{i_0} \cup U_{j_0}$ <u>2. Fall:</u> n ungerade $\Rightarrow |(-1)^n(1-\frac{1}{n}) - (-1)|$
$= |-1+\frac{1}{n}+1| = \frac{1}{n} \leq \frac{1}{N} < \varepsilon \Rightarrow (-1)^n(1-\frac{1}{n}) \in B_\varepsilon(-1) \subseteq$
$U_{i_0} \subseteq U_{i_0} \cup U_{j_0}$ ($\Rightarrow$ Beh.)

Wg. $\bigcup_{i \in I} U_i \supseteq T \cup \{-1, 1\}$ gibt es für jedes $n \in \{1, \dots, N-1\}$ ein
$i_n \in I$ mit $(-1)^n(1-\frac{1}{n}) \in U_{i_n}$. Damit gilt insgesamt
$U_{i_0} \cup U_{i_1} \cup \dots \cup U_{i_{N-1}} \cup U_{j_0} \supseteq T \cup \{-1, 1\}$

Setzen wir also $J = \{i_0, i_1, \dots, i_{N-1}, j_0\}$, dann ist J endlich, und es gilt $\bigcup_{i \in J} U_i \supseteq T \cup \{-1, 1\}$. $\square$