Analysis mehrerer Variablen

— Lösung von Blatt 8 —

(Globalübungsblatt)

Aufgabe 1

Abweichend von der Aufgabenstellung untersuchen wir jede Menge nicht nur auf relative Offenheit, sondern auch auf relative Abgeschlossenheit.

zu (a)(i) Das offene Intervall $] -\frac{1}{2}, \frac{3}{2} [$ ist offen in $\mathbb{R}$. Es gilt $X \cap] -\frac{1}{2}, \frac{3}{2} [= ([0, 1] \cap] -\frac{1}{2}, \frac{3}{2} [) \cup ([2, 3] \cap] -\frac{1}{2}, \frac{3}{2} [) = [0, 1] \cup \emptyset = \emptyset$. Das Kriterium aus Satz (4.22) zeigt, dass $U_1 = [0, 1]$ eine relativ offene Teilmenge von X ist.

Ebenso ist das offene Intervall $] \frac{3}{2}, \frac{7}{2} [$ offen in $\mathbb{R}$. Es gilt $X \cap] \frac{3}{2}, \frac{7}{2} [= ([0, 1] \cap] \frac{3}{2}, \frac{7}{2} [) \cup ([2, 3] \cap] \frac{3}{2}, \frac{7}{2} [) = \emptyset \cup [2, 3] = [2, 3]$. Also ist die $[2, 3]$ in X relativ offen, und folglich ist $U_1 = X \setminus [2, 3]$ in X relativ abgeschlossen.

zu (a)(ii) Sei d_X die Metrik auf X , die durch Einschränkung von d zu Stande kommt. Nach Definition ist eine Teilmenge $U \subseteq X$ genau dann relativ offen bzw. abgeschlossen in X , wenn U im metrischen Raum (X, d_X) offen bzw. abgeschlossen ist. Nach Satz (4.5) ist X in (X, d_X) stets offen, also ist $U_2 = X$ relativ offen in X . Ebenso ist X in (X, d_X) nach Satz (4.14) stets abgeschlossen, also ist U_2 auch relativ abgeschlossen in X .

zu (a)(iii) Das abgeschlossene Intervall $[1, 2]$ ist eine abgeschlossene Teilmenge von $\mathbb{R}$, also ist $U = \mathbb{R} \setminus [1, 2]$ offen in $\mathbb{R}$. Es gilt $X \cap U = X \setminus [1, 2] = [0, 1] \cup [2, 3] = U_3$; dies zeigt, dass U_3 in X relativ offen ist.

Wäre U_3 in X relativ abgeschlossen, also nach Definition eine abgeschlossene Teilmenge des metrischen Raums (X, d_X) , dann müsste nach Satz (4.16) der Grenzwert jeder Folge in U_3 , die in X konvergiert, in U_3 liegen. Nun ist die Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ gegeben durch $x_n = 1 - \frac{1}{n}$ in X enthalten, und sie konvergiert gegen $\lim_n x_n = 1$. Aber 1 ist kein Element von U_3 . Also ist U_3 nicht relativ abgeschlossen.

zu (b) Die Menge $U =] \frac{1}{2}, \frac{3}{4} [$ erfüllt offenbar $\emptyset \subsetneq U, V \subsetneq X$, und sie ist in X weder relativ offen noch relativ abgeschlossen. Denn wäre sie relativ offen, dann gäbe es ein $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ mit $B_\varepsilon(\frac{1}{2}) \cap X \subseteq U$, wobei $B_\varepsilon(\frac{1}{2})$ den offenen Ball in $\mathbb{R}$ vom Radius ε um $\frac{1}{2}$ bezüglich der Standardmetrik bezeichnet. Wählen wir aber $t \in \mathbb{R}$ beliebig mit $\max\{0, \frac{1}{2} - \varepsilon\} < t < \frac{1}{2}$, dann gilt zwar $t \in B_\varepsilon(\frac{1}{2})$, aber $t \notin U$. Um zu zeigen, dass U auch nicht relativ abgeschlossen ist, verwenden wir wieder das Kriterium aus Satz (4.16). Die Folge $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ gegen durch $y_n = \frac{3}{4} - \frac{1}{4n}$ ist zwar in U enthalten und besitzt in X den Grenzwert $\frac{3}{4}$, aber der Grenzwert liegt nicht in U .

Für die Menge V können wir $V = U_1$ setzen. Es gilt $\emptyset \subsetneq U_1 \subsetneq X$, und wir haben bereits gezeigt, dass U_1 in X relativ offen und relativ abgeschlossen ist.

Aufgabe 2

zu (a) Wäre $T \subseteq \mathbb{R}$ kompakt, dann wäre T nach dem Satz von Heine-Borel beschränkt und abgeschlossen. Nehmen wir an, dass T abgeschlossen ist. Dann muss nach Satz (4.16) jede Folge in T , in $\mathbb{R}$ konvergiert, ihren Grenzwert in T haben. Wir betrachten nun die Folge $(x_m)_{m \in \mathbb{N}}$ gegeben durch $x_m = (-1)^{2m}(1 - \frac{1}{2m}) = 1 - \frac{1}{2m}$. Diese ist offenbar in T enthalten, und es gilt $\lim_m x_m = \lim_m (1 - \frac{1}{2m}) = 1 - 0 = 1$. Aber der Grenzwert 1 ist kein Element von T , denn jedes Element in $x \in T$ hat die Form $x = (-1)^n(1 - \frac{1}{n})$ für ein $n \in \mathbb{N}$, also $|x| = |1 - \frac{1}{n}| < 1$ und damit $x \neq 1$. Also ist T nicht abgeschlossen.

zu (b) Sei $(U_i)_{i \in I}$ eine offene Überdeckung von $T' = T \cup \{-1, 1\}$ in $\mathbb{R}$. Dann gilt insbesondere $-1 \in \bigcup_{i \in I} U_i$ und $1 \in \bigcup_{i \in I} U_i$, es gibt also $k_1, k_2 \in I$ mit $-1 \in U_{k_1}$ und $1 \in U_{k_2}$. Da U_{k_1} und U_{k_2} offen sind, gibt es $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \in \mathbb{R}^+$ mit $B_{\varepsilon_1}(-1) \subseteq U_{k_1}$ und $B_{\varepsilon_2}(1) \subseteq U_{k_2}$. Sei $N \in \mathbb{N}$ so groß gewählt, dass $\frac{1}{N} < \min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}$ gilt. Wir zeigen nun, dass

$$(-1)^n(1 - \frac{1}{n}) \in U_{k_1} \cup U_{k_2} \quad \text{für alle } n \geq N \text{ erfüllt ist.}$$

Sei also $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq N$ vorgegeben. Ist n gerade, dann gilt $(-1)^n(1 - \frac{1}{n}) = \frac{1}{n}$ und $|(1 - \frac{1}{n}) - 1| = \frac{1}{n} < \varepsilon_2$. Also ist $(-1)^n(1 - \frac{1}{n})$ in $B_{\varepsilon_2}(1)$ und damit in $U_{k_1} \cup U_{k_2}$ enthalten. Ist n ungerade, dann gilt $(-1)^n(1 - \frac{1}{n}) = \frac{1}{n} - 1$ und $|\frac{1}{n} - 1 - (-1)| = \frac{1}{n} < \varepsilon_1$, also $(-1)^n(\frac{1}{n} - 1) \in B_{\varepsilon_1}(-1)$ und somit ebenfalls $(-1)^n(\frac{1}{n} - 1) \in U_{k_1} \cup U_{k_2}$.

Weil $(U_i)_{i \in I}$ eine offene Überdeckung von T' , gibt es auch für jedes $n \in \mathbb{N}$ mit $1 \leq n < N$ ein $j_n \in I$ mit $(-1)^n(\frac{1}{n} - 1) \in U_{j_n}$. Setzen wir nun $J = \{j_1, \dots, j_{n-1}, k_1, k_2\}$, dann gilt insgesamt $T' \subseteq \bigcup_{j \in J} U_j$. Also ist durch $(U_j)_{j \in J}$ eine endliche Teilüberdeckung von T' in $(U_i)_{i \in I}$ gegeben.

Aufgabe 3

Sei $(U_i)_{i \in I}$ eine offene Überdeckung von A . Wir müssen zeigen, dass eine endlichen Teilmenge $J \subseteq I$ existiert, so dass auch $(U_i)_{i \in J}$ eine offene Überdeckung von A ist. Sei $k \in \{1, \dots, n\}$. Die Familie $(U_i)_{i \in I}$ ist nicht nur eine offene Überdeckung von A , sondern auch von A_k , wegen $\bigcup_{i \in I} U_i \supseteq A \supseteq A_k$. Weil A_k kompakt ist, existiert eine endliche Teilmenge $J_k \subseteq I_k$ mit $\bigcup_{i \in J_k} U_i \supseteq A_k$. Setzen wir $J = J_1 \cup \dots \cup J_n$, dann ist auch dies eine endliche Teilmenge von I , und außerdem gilt

$$\bigcup_{i \in J} U_i = \bigcup_{k=1}^n \bigcup_{i \in J_k} U_i \supseteq \bigcup_{k=1}^n A_k = A.$$

Also ist $(U_i)_{i \in J}$ eine offene Überdeckung von A .