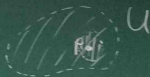


Aufgabe 1 (X, d) metrischer Raum, $U \subseteq X$

zu (a)

$p \in U$ U Umgebung von p



$$\Leftrightarrow \exists \varepsilon \in \mathbb{R}^+ : B_\varepsilon(p) \subseteq U$$

z.zg. $U \subseteq \mathbb{R}^2$ Umgebung eines Punktes $(x, y) \in \mathbb{R}^2$

$$\Leftrightarrow \exists a, b, c, d \in \mathbb{R} : a < x < b, c < y < d,]a, b[\times]c, d[\subseteq U$$

" $\Rightarrow$ " Vor: $U \subseteq \mathbb{R}^2$ Umgebung von $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \rightarrow$

$$\exists \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \quad B_\varepsilon((x, y)) = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 \mid \|(u, v) - (x, y)\|_\infty < \varepsilon\}$$

$\subseteq U$ Für jedes $(u, v) \in \mathbb{R}^2$ gilt die Äquivalenz

$$(u, v) \in B_\varepsilon((x, y)) \Leftrightarrow \|(u, v) - (x, y)\|_\infty = \|(u-x, v-y)\|_\infty$$

$$< \varepsilon \Leftrightarrow \max\{|u-x|, |v-y|\} < \varepsilon \Leftrightarrow |u-x| < \varepsilon \text{ und } |v-y| < \varepsilon$$

$$\Leftrightarrow x-\varepsilon < u < x+\varepsilon \text{ und } y-\varepsilon < v < y+\varepsilon$$

$$\Leftrightarrow (u, v) \in]x-\varepsilon, x+\varepsilon[\times]y-\varepsilon, y+\varepsilon[$$

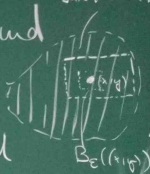
Setzen wir also $a = x - \varepsilon$, $b = x + \varepsilon$, $c = y - \varepsilon$, $d = y + \varepsilon$

dann gilt $[a, b] \times [c, d] = B_\varepsilon((x, y)) \subseteq U$

und $a < x < b$, $c < y < d$

" $\Leftarrow$ " Vor $\Rightarrow \exists a, b, c, d \in \mathbb{R}$: $a < x < b$, $c < y < d$ und $[a, b] \times [c, d] \subseteq U$

1. Möglichkeit: Setze $\varepsilon = \min \{x - a, b - x, y - c, d - y\}$
und überprüfe $B_\varepsilon((x, y)) \subseteq [a, b] \times [c, d] \subseteq U$



2. Möglichkeit: Zeige, dass $V = [a, b] \times [c, d]$
eine offene Teilmenge von $\mathbb{R}^2$ ist. Aus $p \in V$ und
 $V \subseteq U$ folgt dann lt. Vorlesung, dass U Umgebung
von (x, y) ist.

Seien $\pi_1, \pi_2: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ die Koordinatenabb. geg.
durch $\pi_1(u, v) = u$, $\pi_2(u, v) = v$, diese sind li. Vl. stetig.
 $]a, b[$, $]c, d[\subseteq \mathbb{R}$ sind offene Teilmengen $\xRightarrow{\text{Stetigkeit}}$

$\pi_1^{-1}(]a, b[)$, $\pi_2^{-1}(]c, d[) \subseteq \mathbb{R}^2$ sind offen $\Rightarrow$

$\pi_1^{-1}(]a, b[) \cap \pi_2^{-1}(]c, d[)$ ist offen in $\mathbb{R}^2$

Außerdem gilt $\pi_1^{-1}(]a, b[) \cap \pi_2^{-1}(]c, d[) =]a, b[\times]c, d[$.

denn für alle $(u, v) \in \mathbb{R}^2$ gilt die Äquivalenz

$$(u, v) \in \pi_1^{-1}(]a, b[) \cap \pi_2^{-1}(]c, d[) \Leftrightarrow (u, v) \in \pi_1^{-1}(]a, b[) \text{ und}$$

$$(u, v) \in \pi_2^{-1}(]c, d[) \Leftrightarrow u = \pi_1(u, v) \in]a, b[\text{ und } v = \pi_2(u, v)$$

$$\in]c, d[\Leftrightarrow (u, v) \in]a, b[\times]c, d[$$

Also ist $]a, b[\times]c, d[$ tatsächlich offen

Zu (b) z.zg. $U, V \subseteq \mathbb{R}$ offen $\Rightarrow U \times V \subseteq \mathbb{R}^2$ offen

Sei $(x, y) \in U \times V$ z.zg. $U \times V$ ist Umgebung von (x, y)

$x \in U$, U offen $\Rightarrow \exists \varepsilon \in \mathbb{R}^+ :]x - \varepsilon, x + \varepsilon[\subseteq U$

$y \in V$, V offen $\Rightarrow \exists \varepsilon \in \mathbb{R}^+ :]y - \varepsilon, y + \varepsilon[\subseteq V$

insgesamt: $x - \varepsilon < x < x + \varepsilon$, $y - \varepsilon < y < y + \varepsilon$

und $]x - \varepsilon, x + \varepsilon[\times]y - \varepsilon, y + \varepsilon[\subseteq U \times V$

Teil (a) $\rightarrow U$ ist Umgebung von (x, y)

□

Aufgabe 2

zu (a) z.zg.: $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \leq z \leq 1, x^2 + y^2 \leq (1-z)^2\}$
ist abgeschlossen in $\mathbb{R}^3$



Seien $\pi_1, \pi_2, \pi_3: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ die Projektionen auf die erste, zweite bzw. dritte Koordinate (lt. VL. stetig)

Für alle $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ gilt die Äquivalenz

$$(x, y, z) \in A \iff 0 \leq z \leq 1 \text{ und } x^2 + y^2 \leq (1-z)^2$$

$$\iff \pi_3(x, y, z) \in [0, 1] \text{ und } (1-z)^2 - x^2 - y^2 \geq 0$$

$$\iff (x, y, z) \in \pi_3^{-1}([0, 1]) \text{ und } f(x, y, z) \in [0, +\infty[$$

wobei $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ durch $f(x, y, z) = (1-z)^2 - x^2 - y^2$

$$\iff (x, y, z) \in \pi_3^{-1}([0, 1]) \cap f^{-1}([0, +\infty[)$$

$[0,1] \subseteq \mathbb{R}$ abgeschlossen, π_3 stetig $\Rightarrow \pi_3^{-1}([0,1])$ abg.
 $[0,+\infty[\subseteq \mathbb{R}$ abgeschlossen, $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ ist als Polynom-
 fkt stetig $\Rightarrow f^{-1}([0,+\infty[)$ ist abgeschlossen in $\mathbb{R}^3$
 $\Rightarrow \pi_3^{-1}([0,1]) \cap f^{-1}([0,+\infty[)$ ist abgeschlossen
 $\Rightarrow A$ ist abgeschlossen

zu (b) gesucht: Menge der inneren Punkte von A
 (x,y,z) innerer Punkt von $A \Leftrightarrow \exists \varepsilon \in \mathbb{R}^+, B_\varepsilon(x,y,z) \subseteq A$
 wobei $B_\varepsilon(x,y,z)$ den Ball vom Radius ε bzgl. $\|\cdot\|_\infty$
 bezeichnet

Sei $B = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 < z < 1, x^2 + y^2 < (1-z)^2\}$

zeige: (i) B besteht aus inneren Punkten

(ii) Kein Punkt in $A \setminus B$ ist innerer Punkt

zu (i) Überprüfe, dass B offen ist.

Für alle (x, y, z) gilt die Äquivalenz

$$(x, y, z) \in B \iff 0 < z < 1 \text{ und } x^2 + y^2 < (1-z)^2$$

$$\iff \dots \iff (x, y, z) \in \pi_3^{-1}(]0, 1[) \cap f^{-1}(]0, +\infty[)$$

$]0, 1[\subseteq \mathbb{R}$ offen, π_3 stetig $\Rightarrow \pi_3^{-1}(]0, 1[)$ offen

$]0, +\infty[\subseteq \mathbb{R}$ offen, f stetig $\Rightarrow f^{-1}(]0, +\infty[)$ offen

$\Rightarrow B = \pi_3^{-1}(]0, 1[) \cap f^{-1}(]0, +\infty[)$ ist offen

Ist nun $(x, y, z) \in B$ vorgeg., dann existiert (da B offen)
ein $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ mit $B_\varepsilon((x, y, z)) \subseteq B \subseteq A$. Also ist

(x, y, z) ein innerer Punkt von A .

Sei nun $(x, y, z) \in A \setminus B$. $z \geq 0$: (x, y, z) kein innerer Punkt von A . Ang. (x, y, z) ist innerer Punkt von $A \Rightarrow$

$\exists \varepsilon \in \mathbb{R}^+$ mit $B_\varepsilon((x, y, z)) \subseteq A$. Dabei gilt

$$B_\varepsilon((x, y, z)) =]x-\varepsilon, x+\varepsilon[\times]y-\varepsilon, y+\varepsilon[\times]z-\varepsilon, z+\varepsilon[$$

$$\text{denn } (u, v, w) \in B_\varepsilon((x, y, z)) \Leftrightarrow \|(u, v, w) - (x, y, z)\|_\infty < \varepsilon \Leftrightarrow \max\{|u-x|, |v-y|, |w-z|\} < \varepsilon \Leftrightarrow$$

$$|u-x|, |v-y|, |w-z| < \varepsilon \Leftrightarrow x-\varepsilon < u < x+\varepsilon, y-\varepsilon < v < y+\varepsilon$$

$$z-\varepsilon < w < z+\varepsilon \Leftrightarrow (u, v, w) \in]x-\varepsilon, x+\varepsilon[\times]y-\varepsilon, y+\varepsilon[\times]z-\varepsilon, z+\varepsilon[$$

außerdem: $(x, y, z) \in A \setminus B \Rightarrow z=0$ oder $z=1$ oder $x^2+y^2=(1-z)^2$

1. Fall: $z=0$. Dann gilt $(x, y, z-\frac{1}{2}\varepsilon) \in B_\varepsilon((x, y, z))$

(da $x-\varepsilon < x < x+\varepsilon, y-\varepsilon < y < y+\varepsilon, z-\varepsilon < z-\frac{1}{2}\varepsilon < z+\varepsilon$)

aber $(x, y, z-\frac{1}{2}\varepsilon) = (x, y, -\frac{1}{2}\varepsilon) \notin A \nRightarrow B_\varepsilon((x, y, z)) \not\subseteq A$

2. Fall: $z=1$ Dann gilt $(x, y, z + \frac{1}{2}\varepsilon) \in B_z((x, y, z))$,
aber $(x, y, z + \frac{1}{2}\varepsilon) = (x, y, 1 + \frac{1}{2}\varepsilon) \notin A$ $\nmid$

3. Fall: $x^2 + y^2 = (1-z)^2$

Ist $x > 0$, dann setze $x' = x + \frac{1}{2}\varepsilon \Rightarrow |x'| > |x| \Rightarrow$
 $(x')^2 + y^2 > x^2 + y^2 = (1-z)^2 \Rightarrow (x', y, z) \notin A$
aber $(x', y, z) \in B_z((x, y, z))$ $\nmid$

Ist $x < 0$, dann setze $x' = x - \frac{1}{2}\varepsilon \Rightarrow |x'| > |x|$
 $\Rightarrow$ erhalte wiederum $(x', y, z) \in B_z((x, y, z)) \setminus A$ $\nmid$



Aufgabe 3 $V = \mathbb{R}$ -Vektorraum der stetigen Funktionen $[0,1] \rightarrow \mathbb{R}$. Supremumsnorm $\|f\|_\infty = \sup_{x \in [0,1]} |f(x)|$, $\phi: V \rightarrow V$ geg. durch

$$\phi(f)(x) = \int_0^x f(t) dt, \quad x \in [0,1], f \in V$$

zu (a) z.zg. ϕ ist lineare Abb.

Seien $f, g \in V$, $\lambda \in \mathbb{R}$ und $x \in [0,1]$.

$$\begin{aligned} \phi(f+g)(x) &= \int_0^x (f+g)(t) dt = \int_0^x (f(t)+g(t)) dt = \\ &= \int_0^x f(t) dt + \int_0^x g(t) dt = \phi(f)(x) + \phi(g)(x) = (\phi(f) + \phi(g))(x) \end{aligned}$$

Da $x \in [0,1]$ beliebig vorgeg. war, folgt $\phi(f+g) = \phi(f) + \phi(g)$.

$$\phi(\lambda f)(x) = \int_0^x (\lambda f)(t) dt = \int_0^x \lambda \cdot f(t) dt =$$

$$\lambda \int_0^x f(t) dt = \lambda \cdot \phi(f)(x) = (\lambda \phi(f))(x)$$

Da $x \in [0, 1]$ bel. vorgeg. war, folgt $\phi(\lambda f) = \lambda \phi(f)$

zu (b) z.zg.: ϕ stetig, d.h. es gibt eine Konstante

$\gamma \in \mathbb{R}^+$ mit $\|\phi(f)\|_\infty \leq \gamma \|f\|_\infty$

$$\text{Sei } x \in [0, 1]. \quad |\phi(f)(x)| = \left| \int_0^x f(t) dt \right| \leq$$

$$\int_0^x |f(t)| dt \leq \int_0^x \|f\|_\infty dt \leq x \|f\|_\infty \leq \|f\|_\infty^{(*)}$$

$\Rightarrow$ Die Abschätzung ist also durch $\gamma = 1$ erfüllt.

gesucht: Operatornorm $\|\phi\| = \sup_{\|f\|_\infty \leq 1} \|\phi(f)\|_\infty$

Sei $f \in V$ mit $\|f\|_\infty \leq 1$ s.o. $\Rightarrow$

[Nachtrag (*): also: $\|\phi(f)\|_\infty = \sup_{x \in [0,1]} |\phi(f)(x)| \leq \|f\|_\infty$]

$\|\phi(f)\|_\infty \leq \|f\|_\infty \leq 1 \Rightarrow 1$ ist obere Schranke von
 $\{\|\phi(f)\|_\infty \mid f \in V, \|f\|_\infty \leq 1\} \Rightarrow \|\phi\| \leq 1$

Sei nun f die konstante Fkt. geg. durch

$$f: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto 1$$

$$\|f\|_\infty = \sup_{x \in [0,1]} |f(x)| = \sup_{x \in [0,1]} 1 = 1$$

$$\phi(f)(x) = \int_0^x f(t) dt = \int_0^x 1 dt = x$$

$$f: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto 1$$

$$\|f\|_\infty = \sup \{ |f(x)| \mid x \in [0,1] \} = \sup \{ 1 \} = 1$$

$$\Rightarrow \| \phi(f) \|_\infty = \sup \{ | \phi(f)(x) | \mid x \in [0,1] \}$$

$$= \sup \{ x \mid x \in [0,1] \} = 1$$

$$\Rightarrow 1 \in \{ \| \phi(f) \|_\infty \mid f \in V, \| f \|_\infty \leq 1 \}$$

Da 1 zugleich obere Schranke der Menge ist, folgt

$$\| \phi \| = \sup \{ \| \phi(f) \|_\infty \mid f \in V, \| f \|_\infty \leq 1 \} = 1$$

□