Analysis mehrerer Variablen (LA Gym)

— **Lösung Blatt 7** —

(Globalübungsblatt)

Aufgabe 1

zu (a) Nach Satz (1.7) sind alle Normen auf $\mathbb{R}^2$ äquivalent, nach Prop. (4.4) definieren äquivalente Normen die gleichen offenen Mengen, und nach Prop. (4.7) lässt sich die Definition der Umgebung auf die offenen Mengen zurückführen. Deshalb können wir davon ausgehen, dass die Offenheit einer Menge und die Umgebungs-Eigenschaft durch die $\|\cdot\|_\infty$-Norm definiert ist. Für jeden Punkt $p \in \mathbb{R}^2$ und jedes $r \in \mathbb{R}^+$ sei $B_r(p)$ der offene Ball vom Radius r bezüglich $\|\cdot\|_\infty$. Sei nun $p = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ vorgegeben.

„$\Rightarrow$“ Setzen wir voraus, dass U eine Umgebung von p ist. Dann gibt es ein $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ mit $B_\varepsilon(p) \subseteq U$. Für jeden Punkt $(x', y') \in \mathbb{R}^2$ gilt die Äquivalenz

$$(x', y') \in B_\varepsilon(p) \quad \Leftrightarrow \quad \|(x', y') - (x, y)\|_\infty < \varepsilon \quad \Leftrightarrow \quad \|(x' - x, y' - y)\|_\infty < \varepsilon \quad \Leftrightarrow$$

$$\max\{|x' - x|, |y' - y|\} < \varepsilon \quad \Leftrightarrow \quad |x' - x|, |y' - y| < \varepsilon \quad \Leftrightarrow$$

$$x - \varepsilon < x' < x + \varepsilon \ , \ y - \varepsilon < y' < y + \varepsilon \quad \Leftrightarrow \quad (x', y') \in \,]x - \varepsilon, x + \varepsilon[\times]y - \varepsilon, y + \varepsilon[\,.$$

Setzen wir $a = x - \varepsilon$, $b = x + \varepsilon$, $c = x - \varepsilon$, $d = x + \varepsilon$, dann gilt also $]a, b[\times]c, d[= B_\varepsilon(x, y) \subseteq U$ und außerdem offenbar $a < x < b$ und $c < y < d$

„$\Leftarrow$“ Es genügt zu zeigen, dass $V = \,]a, b[\times]c, d[$ eine offene Teilmenge von $\mathbb{R}^2$ ist, denn laut Vorlesung ist U genau dann eine Umgebung von (x, y), wenn eine offene Menge V mit $(x, y) \in V$ und $V \subseteq U$ existiert. Die Abbildungen $\pi_1, \pi_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gegeben durch $\pi_1(x, y) = x$ und $\pi_2(x, y) = y$ sind stetig. Daraus folgt, dass die Urbilder $\pi_1^{-1}(]a, b[)$ und $\pi_2^{(}]c, d[)$ der offenen Teilmengen $]a, b[\,,]c, d[\subseteq \mathbb{R}$ offen sind. Damit ist auch der Durchschnitt $\pi_1^{-1}(]a, b[) \cap \pi_2^{(}]c, d[)$ offen, und dieser stimmt mit $V = \,]a, b[\times]c, d[$ überein, denn für alle $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ gilt die Äquivalenz

$$(x, y) \in \pi_1^{-1}(]a, b[) \cap \pi_2^{-1}(]c, d[) \quad \Leftrightarrow \quad (x, y) \in \pi_1^{-1}(]a, b[) \text{ und } (x, y) \in \pi_2^{-1}(]c, d[) \quad \Leftrightarrow$$
$$x = \pi_1(x, y) \in \,]a, b[\text{ und } y = \pi_2(x, y) \in \,]c, d[\quad \Leftrightarrow \quad (x, y) \in \,]a, b[\times]c, d[\,.$$

zu (b) Sei $(x, y) \in U \times V$ vorgegeben. Zu zeigen ist, dass ein $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ mit $B_\varepsilon(x, y) \subseteq U \times V$ existiert. Für jedes $a \in \mathbb{R}$ und $r \in \mathbb{R}^+$ sei $B_{1,r}(a)$ der offene Ball vom Radius 1 bezüglich der Standard-Metrik d_1 auf $\mathbb{R}$ gegeben durch $d_1(u, v) = |u - v|$ für alle $u, v \in \mathbb{R}$. Für alle $u \in \mathbb{R}$ gilt die Äquivalenz $u \in B_{1,r}(a) \Leftrightarrow |u - a| < r \Leftrightarrow a - r < u < a + r \Leftrightarrow a \in \,]u - r, u + r[$, also $B_{1,r}(a) = \,]u - r, u + r[$.

Auf Grund der Offenheit von U gibt es ein $\varepsilon_1 \in \mathbb{R}^+$ mit $B_{1,\varepsilon_1}(x) = \,]x - \varepsilon_1, x + \varepsilon_1[\subseteq U$, und weil V offen ist, existiert ein $\varepsilon_2 \in \mathbb{R}^+$ mit $B_{1,\varepsilon_2}(y) = \,]y - \varepsilon_2, y + \varepsilon_2[\subseteq V$. Insgesamt gilt also $]x - \varepsilon_1, x + \varepsilon_1[\times]y - \varepsilon_2, y + \varepsilon_2[\subseteq U \times V$. Nach Teil (a) folgt daraus, dass $U \times V$ eine Umgebung von (x, y) ist, und daraus wiederum folgt nach Definition, dass ein $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ mit $B_\varepsilon(x, y) \subseteq U \times V$ existiert.

Aufgabe 2

zu (a) Laut Vorlesung ist die Abbildung $\pi_3 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $(x,y,z) \mapsto z$ stetig. Weil das Urbild einer abgeschlossenen Teilmenge von $\mathbb{R}$ unter einer stetigen Abbildung abgeschlossen ist, und weil abgeschlossene Intervalle abgeschlossene Teilmengen von $\mathbb{R}$ sind, ist $V_1 = \pi_3^{-1}([0,1])$ eine abgeschlossene Teilmenge von $\mathbb{R}^3$.

Weil die Funktion $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ gegeben durch $f(x,y,z) = (1-z)^2 - x^2 - y^2$ durch Addition und Multiplikation aus den stetigen Abbildungen $(x,y,z) \mapsto x$, $(x,y,z) \mapsto y$, $(x,y,z) \mapsto z$ und konstanten Abbildungen zu Stande kommt, ist auch f stetig. Das abgeschlossene Intervall $[0,+\infty[$ ist abgeschlossen, somit ist auch $V_2 = f^{-1}([0,+\infty[)$ abgeschlossen. Als Durschnitt zweier abgeschlossener Teilmengen von $\mathbb{R}^3$ ist auch $V_1 \cap V_2$ abgeschlossen. Die Äquivalenz

$$(x,y,z) \in V_1 \cap V_2 \quad \Leftrightarrow \quad (x,y,z) \in V_1 \ \wedge \ (x,y,z) \in V_2 \quad \Leftrightarrow$$

$$(x,y,z) \in \pi_3^{-1}([0,1]) \ \wedge \ (x,y,z) \in f^{-1}([0,+\infty[) \quad \Leftrightarrow$$

$$\pi_3(x,y,z) \in [0,1] \ \wedge \ f(x,y,z) \in [0,+\infty[\quad \Leftrightarrow \quad z \in [0,1] \ \wedge \ (1-z)^2 - x^2 - y^2 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \quad 0 \leq z \leq 1 \ \wedge \ (1-z)^2 \leq x^2 + y^2 \quad \Leftrightarrow \quad (x,y,z) \in A$$

zeigt, dass $A = V_1 \cap V_2$ gilt. Also ist A abgeschlossen.

zu (b) Weil die Teilmengen $]0,1[$ und $]0,+\infty[$ von $\mathbb{R}$ offen und π_3 und f stetig sind, sind $U_1 = \pi_3^{-1}(]0,1[)$ und $U_2 = f^{-1}(]0,+\infty[)$ offene Teilmengen von $\mathbb{R}^3$. Als Durchschnitt zweier offener Teilmengen ist auch $U_1 \cap U_2$ eine offene Teilmenge von $\mathbb{R}^3$. Auf Grund der Äquivalenz

$$(x,y,z) \in U_1 \cap U_2 \quad \Leftrightarrow \quad (x,y,z) \in U_1 \ \wedge \ (x,y,z) \in U_2 \quad \Leftrightarrow$$

$$(x,y,z) \in \pi_3^{-1}(]0,1[) \ \wedge \ (x,y,z) \in f^{-1}(]0,+\infty[) \quad \Leftrightarrow$$

$$\pi_3(x,y,z) \in \,]0,1[\ \wedge \ f(x,y,z) \in \,]0,+\infty[\quad \Leftrightarrow \quad z \in \,]0,1[\ \wedge \ (1-z)^2 - x^2 - y^2 > 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$0 < z < 1 \ \wedge \ (1-z)^2 < x^2 + y^2 \quad \Leftrightarrow \quad (x,y,z) \in B$$

gilt $B = U_1 \cap U_2$, also ist auch B offen. Auf Grund der Offenheit von B gibt es für jeden Punkt $(x,y,z) \in B$ ein $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ mit $B_\varepsilon(x,y,z) \subseteq B \subseteq A$, wobei $B_\varepsilon(x,y,z)$ den offenen Ball vom Radius ε um (x,y,z) bezüglich der Norm $\|\cdot\|_\infty$ bezeichnet. Dies zeigt, dass A für jeden Punkt $(x,y,z) \in B$ eine Umgebung ist. Also sind alle Punkte von B innere Punkte der Menge A.

Liegt ein Punkt (x,y,z) in $A \setminus B$, dann gilt $z = 0$, $z = 1$ oder $x^2 + y^2 = (1-z)^2$. Wir zeigen, dass (x,y,z) in keinem der drei Fälle ein innerer Punkt von A ist. Wäre dies so, dann gäbe es ein $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ mit $B_\varepsilon(x,y,z) \subseteq A$. Ist nun $z = 0$, dann liegt der Punkt $(x,y,-\frac{1}{2}\varepsilon)$ wegen $\|(x,y,-\frac{1}{2}\varepsilon) - (x,y,z)\|_\infty = \|(x,y,-\frac{1}{2}\varepsilon) - (x,y,0)\|_\infty = \|(0,0,-\frac{1}{2}\varepsilon\|_\infty = \frac{1}{2}\varepsilon < \varepsilon$ zwar in $B_\varepsilon(x,y,z)$, wegen $-\frac{1}{2}\varepsilon < 0$ aber nicht in A. Also ist $B_\varepsilon(x,y,z) \subseteq A$ in diesem Fall nicht erfüllt. Ist $z = 1$, dann liegt der Punkt $(x,y,1+\frac{1}{2}\varepsilon)$ wegen $\|(x,y,1+\frac{1}{2}\varepsilon) - (x,y,z)\|_\infty = \|(x,y,1+\frac{1}{2}\varepsilon) - (x,y,1)\|_\infty = \|(0,0,\frac{1}{2}\varepsilon)\|_\infty = \frac{1}{2}\varepsilon < \varepsilon$ ebenfalls zwar in $B_\varepsilon(x,y,z)$, aber nicht in A. Also gilt $B_\varepsilon(x,y,z) \subseteq A$ auch in diesem Fall nicht.

Betrachten wir nun noch den Fall $x^2+y^2 = (1-z)^2$. Im Fall $x \geq 0$ setzen wir $x_1 = x+\frac{1}{2}\varepsilon$, im Fall $x < 0$ sei $x_1 = x - \frac{1}{2}\varepsilon$. Dann gilt in beiden Fällen $|x_1| = |x| + \frac{1}{2}\varepsilon$, also insbesondere $x_1^2 > x^2$. Sei nun $q = (x_1, y, z)$. Dann gilt einerseits $q \in B_\varepsilon(x, y, z)$ wegen $\|q - (x, y, z)\|_\infty = \|(x - x_1, 0, 0)\|_\infty = |x - x_1| = \frac{1}{2}\varepsilon < \varepsilon$, andererseits ist q aber wegen $x_1^2 + y^2 > x^2 + y^2 = (1 - z)^2$ kein Element von A. Also ist $B_\varepsilon(x, y, z) \subseteq A$ auch hier nicht erfüllt.

Aufgabe 3

zu (a) Seien $f, g \in V$ und $\lambda \in \mathbb{R}$ sowie $x \in [0, 1]$ vorgegeben. Dann gilt

$$\phi(f + g)(x) \quad = \quad \int_0^x (f + g)(t)\ dt \quad = \quad \int_0^x f(t)\ dt + \int_0^x g(t)\ dt \quad = \quad \phi(f)(x) + \phi(g)(x).$$

Daraus folgt $\phi(f + g) = \phi(f) + \phi(g)$. Ebenso folgt aus

$$\phi(\lambda f)(x) \quad = \quad \int_0^x (\lambda f)(t)\ dt \quad = \quad \lambda \int_0^x f(t)\ dt \quad = \quad \lambda\phi(f)(x)$$

die Gleichung $\phi(\lambda f) = \lambda\phi(f)$.

zu (b) Sei $S = \{\|\phi(f)\|_\infty \mid f \in V\ ,\ \|f\|_\infty \leq 1\}$. Wir zeigen, dass $\max S = 1$ gilt; daraus folgt nach Definition, dass die Operatornorm von ϕ gleich 1 ist. Sei dazu $f \in V$ mit $\|f\|_\infty \leq 1$ vorgegeben. Dann gilt $|f(t)| \leq 1$ für jedes $t \in [0, 1]$. Weiter gilt für jedes $x \in [0, 1]$ die Abschätzung

$$|\phi(f)(x)| \quad = \quad \left|\int_0^x f(t)\ dt\right| \quad \leq \quad \int_0^x |f(t)|\ dt$$

und somit $\|\phi(f)\|_\infty = \sup\{|\phi(f)(x)| \mid x \in [0, 1]\} \leq 1$. Dies zeigt, dass 1 eine obere Schranke von S ist.

Sei nun speziell $f_1 : [0, 1] \to \mathbb{R}$ die konstante Funktion gegeben durch $f_1(t) = 1$ für alle $t \in [0, 1]$. Als konstante Funktion ist f_1 stetig, außerdem gilt $\|f_1\|_\infty = \sup\{|f_1(t)| \mid t \in [0, 1]\} = 1$. Darüber hinaus gilt für jedes $x \in [0, 1]$ jeweils

$$|\phi(f_1)(x)| \quad = \quad \left|\int_0^x f_1(t)\ dt\right| \quad = \quad \left|\int_0^x 1\ dt\right| \quad = \quad |x|$$

und somit $\|\phi(f_1)\|_\infty = \sup\{|\phi(f_1)(x)| \mid x \in [0, 1]\} = \sup\{|x| \mid x \in [0, 1]\} = 1$. Dies zeigt, dass $1 \in S$ gilt. Insgesamt erhalten wir $\|\phi\| = \sup S = \max S = 1$.