Analysis mehrerer Variablen

— Lösung Blatt 6 —

(Tutoriumsblatt)

Aufgabe 0

zu (a) Seien (X, d_X) und (Y, d_Y) metrische Räume. Eine Abbildung $f : X \to Y$ ist genau dann in einem Punkt $a \in X$ stetig, wenn für jede Folge $(x^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$, die in (X, d_X) gegen a konvergiert, die Folge $(f(x^{(n)}))_{n\in\mathbb{N}}$ in (Y, d_Y) gegen $f(a)$ konvergiert. Betrachtet man $\mathbb{R}$ mit der Standard-Metrik $d(a, b) = |b - a|$, so ist eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ genau dann in einem Punkt a stetig im Sinne der Analyis einer Variablen, wenn sie als Abbildung zwischen den metrischen Räumen $(\mathbb{R}, d)$ und $(\mathbb{R}, d)$ im Punkt a stetig ist.

zu (b) Neben der Definition kann man auch das ε-δ-Kriterium verwenden. Außerdem hatten wir in der Vorlesung gezeigt, dass die Projektionsfunktionen $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x_i$ für $1 \le i \le n$ überall stetig sind. Jede reellwertige Funktion, die aus stetigen Funktionen durch Addition, Multiplikation, Division oder Komposition zusammengesetzt ist, ist ebenfalls stetig. Eine $\mathbb{R}^n$-wertige Funktion ist genau dann stetig, wenn ihre n reellwertigen Komponentenfunktionen stetig sind.

zu (c) Ein Homöomorphismus zwischen metrischen Räumen ist eine bijektive stetige Abbildung, deren Umkehrabbildung ebenfalls stetig ist. In der Vorlesung hatten wir eine bijektive Abbildung $\phi|_I$ betrachtet, die stetig ist, aber eine unstetige Umkehrabbildung besitzt. Für die Funktion $(\phi|_I)^{-1}$ gilt also, dass sie bijektiv und unstetig, ihre Umkehrfunktion $\phi|_I$ aber stetig ist.

zu (d) Die erste Variante ist nicht möglich, mit f ist auch $f|_D$ in a stetig. Betrachten wir nämlich eine beliebige Folge $(x^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ in D mit $\lim_n x^{(n)} = a$, dann ist dies auch eine Folge in X, und auf Grund der Stetigkeit von f folgt $\lim_n (f|_D)^(x^{(n)}) = \lim_n f^(x^{(n)}) = f(a)$. Die umgekehrte Situation ist aber durchaus möglich, und Beispiele gibt es schon im Eindimensionalen. Definieren wir beispielsweise $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ durch $f(x) = 0$ für $x < 0$ und $f(x) = 1$ für $x \ge 1$, dann ist $f|_{\mathbb{R}_+}$ konstant und somit insbesondere in 0 stetig, aber f ist in 0 unstetig.

zu (e) Man kann den Banachschen Fixpunktsatz anwenden. Dazu überprüft man, dass der metrische Raum vollständig ist und f eine Kontraktion auf X ist. Der Satz besagt, dass unter diesen Voraussetzungen ein Fixpunkt existiert. Sind diese Bedingungen für X selbst nicht erfüllt, dann kann man in vielen Fällen zumindest eine Teilmenge $Y \subseteq X$ finden, so dass $f(Y) \subseteq Y$ gilt und $f|_Y$ eine Kontraktion ist. Ist auch Y mit der eingeschränkten Metrik vollständig, dann lässt sich der Banachsche Fixpunktsatz auf Y und $f|_Y$ anwenden. Der Fixpunkt von $f|_Y$ ist dann zugleich ein Fixpunkt von f.

Aufgabe 1

zu (a) Sei $a \in X$ und $(x^{(n)})$ eine Folge mit $\lim_n x^{(n)} = a$ in (X, δ_X). Zu zeigen ist $\lim_n f(x^{(n)}) = f(a)$. Sei $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ vorgegeben. Auf Grund der Konvergenz gibt es ein $N \in \mathbb{N}$ mit $d_X(a, x^{(n)}) < 1$ für alle $n \ge N$. Nach Definition der diskreten Metrik folgt daraus $d_X(a, x^{(n)}) = 0$ und $x^{(n)} = a$ für alle $n \ge N$. Daraus folgt $d_Y(f(a), f(x^{(n)})) = d_Y(f(a), f(a)) = 0 < \varepsilon$ für alle $n \ge N$ und somit $\lim_n f(x^{(n)}) = f(a)$.

zu (b) „$\Rightarrow$" Konvergiert die Folge $(x^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ in X, dann gibt es ein $a \in X$ mit $\lim_n x^{(n)} = a$. Auf Grund der Stetigkeit von f folgt daraus $\lim_n f(x^{(n)}) = f(a)$, also konvergiert die Folge $(f(x^{(n)}))_{n\in\mathbb{N}}$ im metrischen Raum Y.

„$\Leftarrow$" Konvergiert die Folge $(f(x^{(n)}))_{n\in\mathbb{N}}$ in Y, dann gibt es ein $b \in Y$ mit $\lim_n f(x^{(n)}) = b$. Da f als Homöomorphismus bijektiv ist, existiert außerdem ein $a \in X$ mit $f(a) = b \Leftrightarrow a = f^{-1}(b)$. Da auch die Umkehrabbildung f^{-1} von f stetig ist, folgt aus $\lim_n f(x^{(n)}) = b$ die Gleichung $\lim_n x^{(n)} = \lim_n f^{-1}(f(x^{(n)})) = \lim_n f^{-1}(b) = a$. Also konvergiert die Folge $(x^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ in X.

zu (c) Angenommen, die Abbildung $f : [0,1[\to [0,1]$ ist ein Homöomorphismus. Sei die Folge $(x^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ in $[0,1[$ gegeben durch $x^{(n)} = 1 - \frac{1}{n}$. Weil diese gegen 1 konvergiert und jede Folge in $\mathbb{R}$ höchstens einen Grenzwert hat, besitzt $(x^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ keinen Grenzwert in $[0,1[$. Andererseit hat die Folge $(f(x^{(n)}))_{n\in\mathbb{N}}$ in $[0,1]$ nach Bolzano-Weierstrass einen Häufungspunkt b. Es gibt deshalb eine streng monotone Folge $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ natürlicher Zahlen mit $|f(x^{(n_k)}) - b| < \frac{1}{k}$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Insbesondere gilt $\lim_k f(x^{(n_k)}) = b$. Nach Teil (b) müsste dann die Folge $(x^{(n_k)})_{k\in\mathbb{N}}$ in $[0,1[$ konvergieren. Aber als Teilfolge von $(x^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert auch diese Folge gegen 1, hat also in $[0,1[$ keinen Grenzwert.

Aufgabe 2

zu (a) Wir betrachten die Folge $((x^{(n)}, y^{(n)}))_{n\in\mathbb{N}}$ gegeben durch $x^{(n)} = y^{(n)} = \frac{1}{n}$. Die Komponenten $(x^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ und $(y^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ konvergieren beiden gegen 0, also gilt $\lim_n (x^{(n)}, y^{(n)}) = (0,0)$. Wäre nun f in $(0,0)$ stetig, dann müsste $\lim_n f(x^{(n)}, y^{(n)}) = f(0,0) = 0$ gelten. Tatsächlich gilt aber

$$\lim_{n\to\infty} f(x^{(n)}, y^{(n)}) \quad = \quad \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{n}}{(\frac{1}{n})^2 + (\frac{1}{n})^2} \quad = \quad \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n^2}}{\frac{2}{n^2}} \quad = \quad \lim_{n\to\infty} \tfrac{1}{2} \quad = \quad \tfrac{1}{2}.$$

Dies zeigt, dass f in $(0,0)$ unstetig ist.

zu (b) Sei $((x^{(n)}, y^{(n)}))_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge mit $\lim_n (x^{(n)}, y^{(n)}) = (0,0)$. Zu zeigen ist $\lim_n g((x^{(n)}, y^{(n)})) = g(0,0) = 0$. Sei dazu $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ vorgegeben. Wegen $\lim_n (x^{(n)}, y^{(n)}) = (0,0)$ gilt $\lim_n x^{(n)} = 0$ und $\lim_n y^{(n)} = 0$. Insbesondere gibt es ein $N \in \mathbb{N}$ mit $|y^{(n)}| < \varepsilon$ für alle $n \geq N$. Wir unterscheiden nun für jedes $n \geq N$ zwei Fälle. Ist $x^{(n)} = 0$, dann ist $g(x^{(n)}, y^{(n)}) = 0$ und somit $|g(x^{(n)}, y^{(n)}) - 0| < \varepsilon$ auf jeden Fall erfüllt. Ansonsten gilt

$$g((x^{(n)}, y^{(n)})) \quad = \quad \frac{(x^{(n)})^2 y^{(n)}}{(x^{(n)})^2 + (y^{(n)})^2} \quad = \quad \frac{y^{(n)}}{1 + (\frac{y^{(n)}}{x^{(n)}})^2}$$

und somit $|g(x^{(n)}, y^{(n)}) - 0| \leq |y^{(n)}| < \varepsilon$. Insgesamt gilt also $|g(x^{(n)}, y^{(n)}) - 0| < \varepsilon$ für alle $n \geq N$, und damit ist $\lim_n g(x^{(n)}, y^{(n)}) = 0$ bewiesen.

Aufgabe 3

zu (a) Sei $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben durch $g(x) = f(x) + x = \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{4}x + \frac{3}{4}$. Auf Grund der Äquivalenz $f(x) = 0 \Leftrightarrow g(x) = x$ genügt es zu zeigen, dass g in $[1,2]$ einen Fixpunkt hat. Als metrischer Raum mit der Standard-Metrik $d(a,b) = |b - a|$ ist $[1,2]$ vollständig. Denn jede Cauchyfolge $(x^{(n)})$ in diesem Raum ist auch eine Cauchyfolge in $\mathbb{R}$ im herkömmlichen Sinn und besitzt somit einen Grenzwert $c = \lim_n x^{(n)}$. Wegen $1 \leq x^{(n)} \leq 2$ gilt auch $1 \leq c \leq 2$, also ist der Grenzwert c in $[1,2]$ enthalten.

Nach dem Banachschen Fixpunktsatz genügt es zu überprüfen, dass g auf $[1,2]$ eine Kontraktion ist. Es gilt $g'(x) = \frac{1}{2}x^2 - x + \frac{3}{4}$ und $g''(x) = x - 1$. Wegen $0 < g''(x) < 1$ für $x \in]1,2[$ ist g' auf $[1,2]$ streng monoton wachsend. Wegen $g'(1) = \frac{1}{4}$ und $g'(2) = \frac{3}{4}$ gilt also $\frac{1}{4} \le g'(x) \le \frac{3}{4}$ und insbesondere $|g'(x)| \le \frac{3}{4}$ für alle $x \in [1,2]$. Seien nun $y, z \in [1,2]$ mit $y < z$ vorgegeben. Auf Grund des Mittelwertsatzes gibt es ein $x_0 \in]y, z[$ mit

$$g'(x_0) \quad = \quad \frac{g(z) - g(y)}{z - y} \quad ,$$

und daraus folgt $|g(z) - g(y)| = |g'(x_0)||z - y| \le \frac{3}{4}|z - y|$. Nun überprüfen wir noch, dass durch g eine Abbildung $[1,2] \to [1,2]$ gegeben ist. Auf Grund des positiven Vorzeichens der Ableitung ist g auf $[1,2]$ streng monoton steigend, also gilt $\frac{7}{6} = g(1) \le g(x) \le g(2) = \frac{19}{12}$ und insbesondere $g(x) \in [1,2]$ für alle $x \in [1,2]$. Damit sind alle Voraussetzungen des Banachschen Fixpunktsatzes erfüllt, und folglich besitzt g in $[1,2]$ genau einen Fixpunkt.

zu (b) Sei $(x^{(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ die Folge gegeben durch $x^{(0)} = \frac{3}{2}$ und $x^{(n+1)} = g(x^{(n)})$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Wir haben in Teil (a) gezeigt, dass g eine Kontraktion mit der Konstanten $\gamma = \frac{3}{4}$ ist. Es gilt $x^{(1)} = g(\frac{3}{2}) = \frac{21}{16}$ und $|x^{(0)} - x^{(1)}| = \frac{3}{16}$. Nach Prop. (2.12) gilt die Abschätzung

$$|x^{(n)} - z| \quad \le \quad \frac{(\frac{3}{4})^n}{1 - \frac{3}{4}}|x^{(0)} - x^{(1)}| \quad = \quad (\tfrac{3}{4})^{n+1}.$$

Also ist $|x^{(n)} - z| < \frac{1}{100}$ sicher erfüllt, wenn $(\frac{3}{4})^{n+1} < \frac{1}{100} \Leftrightarrow (n+1)\ln(\frac{3}{4}) < (-2)\ln(10) \Leftrightarrow (n+1)\ln(\frac{4}{3}) > 2\ln(10) \Leftrightarrow n + 1 > \frac{2\ln(10)}{\ln(\frac{4}{3})}$ gilt. Es ist $\frac{2\ln(10)}{\ln(\frac{4}{3})} \approx 16{,}008$, somit ist die Abschätzung für $n \ge 16$ erfüllt.