

... $\Rightarrow \exists f: X \rightarrow Y$ bijektiv

$(X, d_X), (Y, d_Y)$ metrische Räume

$f: X \rightarrow Y$ Abbildung, $a \in X$

Def. f ist stetig in $a \iff$

Für jede Folge $(x^{(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ in X mit $\lim_{n \rightarrow \infty} x^{(n)} = a$

(in (X, d_X)) gilt $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x^{(n)}) = f(a)$ (in (Y, d_Y))

ϵ - δ -Kriterium. Genau dann ist f in a stetig,

wenn für jedes $\epsilon \in \mathbb{R}^+$ ein $\delta \in \mathbb{R}^+$ existiert, so dass

für alle $x \in X$ die Implikation

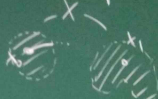
$d(a, x) < \delta \rightarrow d(f(a), f(x)) < \epsilon$ gilt

Aufgabe 1 (X, dx) metrischer Raum

wegzusammenhängend $\Leftrightarrow$ Für bel. Punkte $x_0, x_1 \in X$
gibt es eine stetige Abb. $\gamma: [0,1] \rightarrow X$ mit $\gamma(0) = x_0$
und $\gamma(1) = x_1$



wegzusammenhängend



nicht wegzusammenhängend

2. (a) $(X, dx), (Y, dy)$ homöomorphe met. Räume
 (X, dx) wegzusammenhängend $\Leftrightarrow (Y, dy)$ wegzusghd.
Seien $y_0, y_1 \in Y$. Es $\exists$ stetige Abb. $\gamma: [0,1] \rightarrow Y$
mit $\gamma(y_0) = y_1$. Homöomorphie $\Rightarrow \exists f: X \rightarrow Y$ bijektiv

und stetig, so dass die Umkehrabb. $f^{-1}: Y \rightarrow X$ auch stetig ist. Sei $x_0 = f^{-1}(y_0)$, $x_1 = f^{-1}(y_1)$. (x, dx) wegzshgd. $\rightarrow \exists$ stetige Abb. $\tilde{\gamma}: [0,1] \rightarrow X$ mit $\tilde{\gamma}(0) = x_0$, $\tilde{\gamma}(1) = x_1$. Sei $\gamma = f \circ \tilde{\gamma}$. Dies ist eine Abb. $[0,1] \rightarrow Y$, und sie ist stetig, als Komposition stetiger Abbildungen außerdem: $\gamma(0) = (f \circ \tilde{\gamma})(0) = f(x_0) = f(f^{-1}(y_0)) = y_0$, $\gamma(1) = (f \circ \tilde{\gamma})(1) = f(x_1) = f(f^{-1}(y_1)) = y_1$.

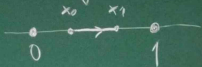
zu (b) z.zg. $X = [0,1] \subseteq \mathbb{R}$, $Y = [0,1] \cup [2,3] \subseteq \mathbb{R}$ sind nicht homöomorph.

Nach Teil (a) genügt es z.zg.

li) X ist wegzshgd (ii) Y nicht wegzshgd.

zu li) Seien $x_0, x_1 \in X$ vorgeg. z.zg. $\exists$ stetige Abb.

$\gamma: [0,1] \rightarrow X$ mit $\gamma(0) = x_0, \gamma(1) = x_1$.



Sei $\gamma: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$ geg durch $\gamma(t) = (1-t)x_0 + tx_1$

zu überprüfen: $\gamma([0,1]) \subseteq X = [0,1]$ Sei $t \in [0,1]$

z.zg. $\gamma(t) \in [0,1]$ $\gamma(t) = (1-t)x_0 + tx_1 \geq (1-t) \cdot 0 + t \cdot 0$

$= 0$. $\gamma(t) = (1-t)x_0 + tx_1 \leq (1-t) \cdot 1 + t \cdot 1 = 1$ $\begin{matrix} \uparrow x_0, x_1 \geq 0 \\ \uparrow t, 1-t \geq 0 \end{matrix}$

Insgesamt gilt also

$0 \leq \gamma(t) \leq 1$, d.h. $\gamma(t) \in [0,1]$

zu lii) Ang. $Y = [0, 1] \cup [2, 3]$ ist wegzshgd.

$\Rightarrow \exists$ stetige Abb. $\gamma: [0, 1] \rightarrow Y$ mit $\gamma(0) = 1, \gamma(1) = 2$.

Betrachte γ als stetige Abb. nach $\mathbb{R}$. Zwischenwertsatz

(Analysis einer Var.) $\Rightarrow \exists t_0 \in]0, 1[$ mit $\gamma(t_0) = \frac{3}{2}$

$\frac{3}{2} \notin Y \Rightarrow \gamma(t_0) \notin Y \Rightarrow \gamma$ ist keine Abb. $[0, 1] \rightarrow Y$ $\nexists$

zu c) geg. (X, dx) wegzshgd., (Y, δ_Y) metr. Raum

wobei δ_Y diskrete Metrik auf Y ($\delta_Y(x, y) = \begin{cases} 0 & x = y \\ 1 & x \neq y \end{cases}$)

$f: X \rightarrow Y$ stetige Abb. z. z. f ist konstant

Seien $x_0, x_1 \in X$ z. z. $f(x_0) = f(x_1)$

X wegzshgd. $\Rightarrow \exists \gamma: [0, 1] \rightarrow X$ stetig, mit

$\gamma(0) = x_0, \gamma(1) = x_1$ Sei $g = f \circ \gamma: [0,1] \rightarrow Y$
z.z. $g: g(0) = g(1)$ (dann $f(x_0) = (f \circ \gamma)(0) = g(0)$
 $= g(1) = (f \circ \gamma)(1) = f(x_1)$)

Hinweis. Betrachte $s = \sup \{ t \in [0,1] \mid g(t) = f(x_0) \}$

Beh. Für jedes $t \in [0,1]$ gibt es ein $\delta_t \in \mathbb{R}^+$ mit
 $g(t') = g(t)$ für alle $t' \in [0,1]$ mit $|t' - t| < \delta_t$

denn: Wende das ε - δ -Kriterium auf $\varepsilon = 1$ an
 g ist stetig in t (als Komposition stetiger Abb.)

$\rightarrow$ Es gibt ein $\delta_t \in \mathbb{R}^+$, so dass $|t' - t| < \delta_t \rightarrow$
 $\delta_t(g(t), g(t')) < 1 \quad \forall t' \in [0,1]$ Für alle $t' \in [0,1]$ mit
 $|t' - t| < \delta_t$ gilt also $\delta_t(g(t), g(t')) = 0$, also $g(t) = g(t')$

($\Rightarrow$ Beh.) also $g(t) = g(0) = f(x_0) \quad \forall t \in [0, 1]$ mit $t < \delta_0$
 $\Rightarrow s > 0$

1. Fall: $s < 1, g(s) = f(x_0)$

Beh $\Rightarrow g(t) = g(s) = f(x_0)$ für alle $t \in [0, 1]$ mit $s \leq t < s + \delta_s$
 $\hookrightarrow$ zur Def des Supremums

2. Fall: $s < 1, g(s) \neq f(x_0)$

Beh $\Rightarrow g(t) = g(s) \neq f(x_0)$ für alle t mit $s - \delta_s \leq t \leq s$
 $\hookrightarrow$ zur Def des Supremums

Also gilt $s = 1$. Ang $g(1) \neq f(x_0)$ Beh $\rightarrow$
 $g(t) = g(1) \neq f(x_0)$ für alle t mit $t \geq 1 - \delta_1$
zur Def von $\rightarrow$ also $g(1) = f(x_0) \rightarrow f(1) = f(x_0) \quad \square$

Aufgabe 2

$$f(x, y) = \begin{cases} \left| \frac{y}{x^2} \right| e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{falls } x \neq 0 \\ 0 & \text{falls } x = 0 \end{cases}$$

zu (a) z.zg: f unstetig in $(0, 0)$, in jedem anderen Punkt stetig

(Unstetigkeit in $(0, 0)$): $f(0, 0) = 0$

Betrachte die Folge $((x_n, y_n))_{n \in \mathbb{N}}$ gg. durch

$$(x_n, y_n) = \left(\frac{1}{\sqrt{n}}, \frac{1}{n} \right)$$

Bekannt: $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} = +\infty \Rightarrow$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} (x_n, y_n) = (0, 0)$$

Für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt $\left| \frac{y_n}{x_n^2} \right| = \left| \frac{\frac{1}{n}}{\left(\frac{1}{n}\right)^2} \right| = \frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} = 1$

und wegen $\frac{1}{n} \neq 0$ somit $f(x_n, y_n) = \left| \frac{y_n}{x_n^2} \right| e^{-\left| \frac{y_n}{x_n^2} \right|} = e^{-1}$

$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n, y_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} e^{-1} = e^{-1} \neq 0 = f(0,0)$ Also ist

f in $(0,0)$ unstetig.

Sei nun $(x_0, y_0) \neq (0,0)$

1. Fall. $x_0 \neq 0$ Betrachte die Teilmenge $U \subset \mathbb{R}^2$
geg durch $U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \neq 0\}$. Diese ist offen,

denn: $V = \{(0, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \in \mathbb{R}\}$ ist abgeschlossen als
Umgeb'd von $\{0\}$ unter der stetigen Abb. $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, (x, y) \mapsto x$

$\rightarrow U = \mathbb{R}^2 \setminus V$ ist offen

Beh.: $f|U$ ist stetig bekannt: $(x,y) \mapsto x, (x,y) \mapsto y$
sind stetig auf $\mathbb{R}^2$, somit auch auf $U \Rightarrow (x,y) \mapsto \frac{y}{x^2}$
stetig auf U Absolutbetrag stetig $\Rightarrow (x,y) \mapsto \left| \frac{y}{x^2} \right|$ stetig
auf U Exp-funktion und $x \mapsto -x$ sind stetig $\Rightarrow$
 $(x,y) \mapsto e^{-\left| \frac{y}{x^2} \right|}$ stetig $\Rightarrow (x,y) \mapsto \left| \frac{y}{x^2} \right| e^{-\left| \frac{y}{x^2} \right|}$ ist stetig.
d.h. $f|U$ ist stetig auf U ($\Rightarrow$ Beh.)

$(x_0, y_0) \in U, U$ offen $\Rightarrow U$ offene Umg. von (x_0, y_0)
Sei nun $((x_n, y_n))_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{R}^2 (!)$ mit $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n, y_n) = (0,0)$.
 U offene Umg. $\Rightarrow \exists N \in \mathbb{N}: (x_n, y_n) \in U \forall n \geq N$
 $\rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n, y_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} (f|U)(x_n, y_n) \stackrel{\text{Beh.}}{=} (f|U)(x_0, y_0)$
 $= f(x_0, y_0)$

(Achtung: Für bel Teilmengen $A, B \subseteq \mathbb{R}^2$ ist
 $f|_A, f|_B$ stetig $\Rightarrow f$ stetig falsch.)

2. Fall $x_0 = 0$, d.h. $(x_0, y_0) = (0, y_0)$, $y_0 \neq 0$

Es gilt $f(x, y) = \begin{cases} h(\frac{y}{x}) & \text{falls } x \neq 0 \\ 0 & \text{falls } x = 0 \end{cases}$ wobei $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
geg durch $h(t) = t e^{-t}$

Beh.: $\lim_{t \rightarrow +\infty} h(t) = 0$ Grund Aus $\lim_{t \rightarrow +\infty} t = \lim_{t \rightarrow +\infty} e^t$

$= +\infty$ folgt mit l'Hospital $\lim_{t \rightarrow +\infty} h(t) =$

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{t}{e^t} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^t} = \lim_{t \rightarrow +\infty} e^{-t} = 0 \quad (\Rightarrow \text{Beh.})$$

Daraus folgt: Für jedes $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ gibt es ein $t_\varepsilon \in \mathbb{R}^+$
mit $h(t) < \varepsilon \quad \forall t > t_\varepsilon$

Zeige nun die Stetigkeit von f in $(0, y_0)$.

Sei $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ vorgeg. Für alle $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ mit $x \neq 0$ gilt die Äquivalenz

$$\left| \frac{y}{x^2} \right| > t_\varepsilon \Leftrightarrow |y| > t_\varepsilon |x^2| \Leftrightarrow \sqrt{|y|} > t_\varepsilon^{\frac{1}{2}} |x| \\ \Leftrightarrow |x| < t_\varepsilon^{-\frac{1}{2}} \sqrt{|y|}$$

Sei nun $(x_n, y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{R}^2$ mit

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n, y_n) = (0, y_0) \rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = y_0 \Rightarrow \exists N_1 \in \mathbb{N}$$

$$|y_n| > \frac{1}{2} |y_0| \quad \forall n \geq N_1 \quad \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0 \Rightarrow \exists N_2 \in \mathbb{N}$$

$$|x_n| < t_\varepsilon^{-\frac{1}{2}} \sqrt{\frac{y_0}{2}} \leq t_\varepsilon^{-\frac{1}{2}} \sqrt{|y_n|}$$

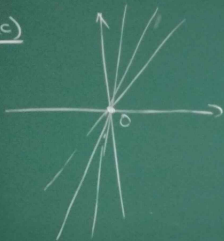
Sei nun $N = \max \{N_1, N_2\}$ und $n \geq N$

Ist $x_n = 0$, dann gilt $f(x_n, y_n) = 0$.

Ist $x_n \neq 0$, dann gilt $f(x_n, y_n) = h\left(\left|\frac{y_n}{x_n^2}\right|\right) < \varepsilon$

wg $\left|\frac{y_n}{x_n^2}\right| > t_\varepsilon$. Also gilt $|f(x_n, y_n) - f(0, y_0)| =$
 $|f(x_n, y_n)| < \varepsilon \quad \forall n \geq N \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n, y_n) = f(0, y_0)$.

zu (c)



Anmerkungen

- Die Lösungen von Aufgabe 2 (b) und Aufgabe 3 finden Sie in der getippten Version.
- In Aufgabe 2 (a) wurde die Stetigkeit direkt anhand der Definition mit konvergenten Folgen bewiesen. In der getippten Version wurden die Stetigkeitsnachweise in Aufgabe 2 (a) und (b) statt dessen mit dem ε - δ -Kriterium geführt.