Analysis mehrerer Variablen (LA Gym)

— Lösung Blatt 6 —

(Globalübungsblatt)

Aufgabe 1

zu (a) Weil (X, d_X) und (Y, d_Y) homöomorph sind, existiert ein Homöomorphismus $f : X \to Y$, also eine bijektive stetige Abbildung von X nach Y, deren Umkehrabbildung $f^{-1} : Y \to X$ ebenfalls stetig ist. Seien nun $y_0, y_1 \in Y$ vorgegeben und $x_0 = f^{-1}(y_0)$, $x_1 = f^{-1}(y_1)$. Weil X wegzusammenhängend ist, gibt es eine stetige Abbildung $\gamma : [0,1] \to X$ mit $\gamma(0) = x_0$ und $\gamma(1) = x_1$. Als Komposition stetiger Abbildung ist nach (6.2) auch $f \circ \gamma : [0,1] \to Y$ stetig, und es gilt $(f \circ \gamma)(0) = f(x_0) = y_0$ und $(f \circ \gamma)(1) = f(x_1) = y_1$.

zu (b) Nach Teil (a) genügt es zu zeigen, dass (X, d_X) wegzusammenhängend, (Y, d_Y) aber nicht wegzusammenhängend ist. Seien x_0, x_1 in $X = [0,1]$ vorgegeben. Wir betrachten die Abbildung $\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}$ gegeben durch $\gamma(t) = (1-t)x_0 + tx_1$ für alle $t \in \mathbb{R}$. Für jedes $t \in [0,1]$ gilt $(1-t)x_0 + tx_1 \geq 0$ und $(1-t)x_0 + tx_1 \leq (1-t) + t = 1$, also $\gamma(t) \in [0,1]$, und offenbar ist γ als Polynomfunktion stetig. Außerdem gilt $\gamma(0) = x_0$ und $\gamma(1) = x_1$. Dies zeigt, dass der metrische Raum (X, d_X) tatsächlich wegzusammenhängend ist.

Wäre (Y, d_Y) wegzusammenhängend, dann gäbe es eine stetige Abbildung $\gamma : [0,1] \to Y$ mit $\gamma(0) = 1$ und $\gamma(1) = 2$. Nach dem Zwischenwertsatz aus der Analysis einer Variablen muss dann wegen $1 < \frac{3}{2} < 2$ ein $t \in [0,1]$ mit $\gamma(t) = \frac{3}{2}$ existieren. Aber dies steht im Widerspruch zu $\gamma(t) \in Y$ für alle $t \in [0,1]$, denn $\frac{3}{2}$ ist kein Element von $Y = [0,1] \cup [2,3]$.

zu (c) Sei $f : X \to Y$ eine stetige Abbildung, und seien $x_0, x_1 \in X$ beliebig vorgegeben. Wenn wir $f(x_0) = f(x_1)$ zeigen können, dann folgt daraus, dass f auf X konstant ist. Da X wegzusammenhängend ist, gibt es eine stetige Abbildung $\gamma : [0,1] \to X$ mit $\gamma(0) = x_0$ und $\gamma(1) = x_1$. Die Abbildung $g = f \circ \gamma : [0,1] \to Y$ ist als Komposition stetiger Abbildungen selbst stetig. Zu zeigen ist $g(0) = g(1)$, denn daraus folgt wegen $g(0) = (f \circ \gamma)(0) = f(x_0)$ und $g(1) = (f \circ \gamma)(1) = f(x_1)$ die gewünschte Aussage.

Für jedes $t \in [0,1]$ existiert ein $\delta_t \in \mathbb{R}^+$ mit der Eigenschaft, dass g auf $[0,1] \cap \,]t - \delta_t, t + \delta_t[$ konstant ist. Weil nämlich g in t stetig ist, existiert nach dem ε-δ-Kriterium, angewendet auf $\varepsilon = 1$, ein $\delta_t \in \mathbb{R}^+$, so dass für alle $t' \in [0,1]$ mit $|t' - t| < \delta_t$ jeweils $\delta_Y(g(t), g(t')) < 1$ gilt. Weil δ_Y nur die Werte 0 und 1 annimmt, ist dies äquivalent zu $\delta_Y(g(t), g(t')) = 0$ und $g(t) = g(t')$.

Dem Hinweis in der Aufgabenstellung folgend betrachten wir $s = \sup A$ für die Menge $A = \{x \in [0,1] \mid g(x) = g(0)\}$. Nehmen wir zunächst an, dass $g(s) \neq g(0)$ ist. Dann gilt auf Grund der Feststellung aus dem vorherigen Abschnitt auch $g(t) = g(s) \neq g(0)$ für alle $t \in [0,1]$ mit $|t - s| < \delta_s$, also $t \notin A$ für alle $t > s - \delta_s$. Es wäre dann auch $s - \frac{1}{2}\delta_s$ eine obere Schranke für A, im Widerspruch zur Definition des Supremums. Also muss $g(s) = g(0)$ gelten. Nehmen wir nun an, es ist $s < 1$. Dann gilt auch $g(t) = g(s) = g(0)$ für alle $t \in [0,1]$ mit $|t - s| < \delta_s$, also $t \in A$ für alle $t \in [0,1]$ mit $t < s + \delta_s$. Jedes $t \in [0,1]$ mit $s < t < \min\{1, s + \delta_s\}$ wäre also in A enthalten, im Widerspruch dazu, dass s eine obere Schranke von A ist. Es ist also $s = 1$ und somit tatsächlich $g(1) = g(s) = g(0)$.

Aufgabe 2

zu (a) Wir betrachten in $\mathbb{R}^2$ die Folge $((x_n, y_n))_{n\in\mathbb{N}}$ gegeben durch $x_n = \frac{1}{n}$ und $y_n = \frac{1}{n^2}$. Wegen $\lim_n x_n = 0$ und $\lim_n y_n = 0$ gilt $\lim_n(x_n, y_n) = (0,0)$. Wäre nun f in $(0,0)$ stetig, dann müsste $\lim_n f(x_n, y_n) = f(0,0) = 0$ gelten. Tatsächlich gilt für alle $n \in \mathbb{N}$ aber $|\frac{y_n}{x_n^2} = \frac{1}{n^2} \cdot n^2 = 1$, also $f(x_n, y_n) = e^{-1}$ und somit $\lim_n f(x_n, y_n) = \lim_n e^{-1} = e^{-1}$.

Sei nun $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. Zunächst betrachten wir den Fall, dass dieser Punkt in der Menge $U = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \neq 0\}$ enthalten ist. Wir zeigen, dass die Abbildung $g = f|_U$ stetig ist. Laut Vorlesung sind die Abbildungen $(x,y) \mapsto x$ und $(x,y) \mapsto y$ auf $\mathbb{R}^2$ stetig, also erst recht auf U. Da x auf U nicht null wird, ist auch $(x,y) \mapsto \frac{y}{x^2}$ auf U stetig. Weil die Betragsfunktion stetig ist und die Komposition stetiger Abbildungen stetig ist, ist auch $(x,y) \mapsto |\frac{y}{x^2}|$ stetig auf U. Weil die Exponentialfunktion stetig ist, ist auch $(x,y) \mapsto e^{-|\frac{y}{x^2}|}$ auf U stetig, und damit schließlich auch die Funktion g, also Produkt von $(x,y) \mapsto |\frac{y}{x^2}|$ und $(x,y) \mapsto e^{-|\frac{y}{x^2}|}$.

Aus der Stetigkeit von $g = f|_U$ folgt mit dem ε-δ-Kriterium nun auch die Stetigkeit von g im Punkt (x_0, y_0). Ist $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ vorgegeben, dann nämlich existiert auf Grund der Stetigkeit von $g|_U$ ein $\delta \in \mathbb{R}^+$, so dass $|(g|_U)(x,y) - (g|_U)(x_0,y_0)| < \varepsilon$ für alle $(x,y) \in U$ mit $\|(x,y) - (x_0,y_0)\|_\infty < \delta$ erfüllt ist. Sei nun $\delta_1 = \min\{|x_0|, \delta\}$ und $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ mit $\|(x,y) - (x_0,y_0)\|_\infty < \delta_1$. Es gilt dann $|x - x_0| < |x_0|$ und somit $x \neq 0$. Daraus folgt $(x,y) \in U$ und somit $|g(x,y) - g(x_0,y_0)| = |(g|_U)(x,y) - (g|_U)(x_0,y_0)| < \varepsilon$, wodurch das ε-δ-Kriterium für g im Punkt (x_0, y_0) verifiziert ist.

Nun zeigen wir noch die Stetigkeit von f in einem beliebigen Punkt der Form $(0, y_0)$ mit $y_0 \neq 0$. Hierfür betrachten wir die Hilfsfunktion $h : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, $t \mapsto te^{-t}$. Auf Grund der l'Hospitalschen Regel gilt

$$\lim_{t\to+\infty} h(t) \quad = \quad \lim_{t\to+\infty} \frac{t}{e^t} \quad = \quad \lim_{t\to+\infty} \frac{1}{e^t} \quad = \quad \lim_{t\to+\infty} e^{-t} \quad = \quad 0.$$

Für jedes $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ existiert also ein $t_\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ mit $|h(t)| < \varepsilon$ für alle $t \in \mathbb{R}$ mit $t > t_\varepsilon$. Für jedes Paar $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ mit $x \neq 0$ gilt darüber hinaus die Äquivalenz

$$\left|\frac{y}{x^2}\right| > t_\varepsilon \quad \Leftrightarrow \quad |y| > t_\varepsilon x^2 \quad \Leftrightarrow \quad |x| < t_\varepsilon^{-1/2}\sqrt{|y|}.$$

Sei nun $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ vorgegeben und

$$\delta \quad = \quad \min\left\{\tfrac{1}{2}|y_0|\,,\, t_\varepsilon^{-1/2}\sqrt{\tfrac{1}{2}|y_0|}\right\}.$$

Für alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ mit $\|(x,y) - (0,y_0)\|_\infty < \delta$ gilt dann $|x| < t_\varepsilon^{-1/2}\sqrt{\frac{1}{2}|y_0|}$ und $|y - y_0| < \frac{1}{2}|y_0|$. Es folgt $|y| > \frac{1}{2}|y_0|$ und $|x| < t_\varepsilon^{-1/2}\sqrt{|y|}$. Ist nun $x = 0$, dann folgt $f(x,y) = 0$ und somit $|f(x,y) - f(x_0,y_0)| = |0 - 0| = 0 < \varepsilon$. Ansonsten erhalten wir, wie oben gezeigt, die Ungleichung $\left|\frac{y}{x^2}\right| > t_\varepsilon$ und schließlich

$$|f(x,y) - f(x_0,y_0)| \quad = \quad |f(x,y)| \quad = \quad h\left(\left|\frac{y}{x^2}\right|\right) \quad \leq \quad \varepsilon.$$

Damit ist das ε-δ-Kriterium auch in dieser Situation verifiziert.

zu (b) Sei $c \in \mathbb{R}$. Wir beweisen die Stetigkeit von $f|_{g_c}$ zunächst im Fall $c = 0$. Sei dazu $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ vorgegeben. Für alle $(x,y) \in g_0$ gilt $y = 0 \cdot x = 0$ und $f(x,y) = f(x,0) = 0$. Wir können also $\delta \in \mathbb{R}^+$ beliebig wählen und erhalten für alle $(x,y) \in g_0$ mit $\|(x,y)\|_\infty < \delta$ die Ungleichung $|f(x,y) - f(0,0)| = |f(x,y)| = 0 < \varepsilon$.

Setzen wir nun $c \neq 0$ voraus. Sei $\varepsilon \in R^+$ vorgegeben, und seien die Hilfsfunktion h und $t_\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ wie in Teil (a) definiert. Für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $x \neq 0$ gilt $\frac{|cx|}{|x^2|} = \frac{|c|}{|x|}$ und somit $f(x, cx) = \frac{|c|}{|x|} e^{-\frac{|c|}{|x|}} = h(\frac{|c|}{|x|})$. Setzen wir $\delta = t_\varepsilon^{-1}|c|$, dann gilt für alle $(x, y) = (x, cx) \in g_c$ mit $\|(x, y)\|_\infty < \delta$ insbesondere $|x| < t_\varepsilon^{-1}|c|$, woraus $\frac{|c|}{|x|} > t_\varepsilon$ und $|f(x, c_x)| = h(\frac{|c|}{|x|}) < \varepsilon$ folgt.

Nun beweisen wir noch die Stetigkeit von $f|_{g_\infty}$. Sei wiederum $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ vorgegeben. Für alle $(x, y) \in g_\infty$ gilt $x = 0$ und somit $f(x, y) = f(0, y) = 0$. Wir können also auch hier $\delta \in \mathbb{R}^+$ beliebig wählen und erhalten für alle $(x, y) \in g_\infty$ mit $\|(x, y)\|_\infty < \delta$ die Ungleichung $|f(x, y) - f(0, 0)| = |f(x, 0)| = 0 < \varepsilon$.

Aufgabe 3

zu (a) Wie in der Tutoriumsaufgabe bestimmen wir eine Kontraktionskonstante mit Hilfe der Ableitung von g. Es gilt $g'(x) = \sin(x) + x\cos(x) - \sin(x) - \frac{1}{4}\pi\cos(x) = x\cos(x) - \frac{1}{4}\pi\cos(x) = (x - \frac{1}{4}\pi)\cos(x)$. Für jedes $x \in [0, \frac{1}{2}\pi]$ gilt $|x - \frac{1}{4}\pi| \leq \frac{1}{4}\pi$ und somit $|g'(x)| = |x - \frac{1}{4}\pi||\cos(x)| \leq |x - \frac{1}{4}\pi| \leq \frac{1}{4}\pi$. Wir setzen $\gamma = \frac{1}{4}\pi < 1$. Sind nun $y, z \in [0, \frac{1}{2}\pi]$ vorgegeben, dann gibt es nach dem Mittelwertsatz ein $x \in \left]0, \frac{1}{2}\pi\right[$ mit $g(y) - g(z) = g'(x)(y - z)$. Es folgt $|g(y) - g(z)| = |g'(x_0)||y - z| \leq \gamma|y - z|$.

Es gilt $g(0) = 1$, $g(\frac{1}{2}\pi) = \frac{1}{4}\pi$ und $g(\frac{1}{4}\pi) = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Wegen $\cos(x) > 0$ für alle $x \in [0, \frac{1}{2}\pi]$ gilt $g'(x) < 0$ für $x \in \left]0, \frac{1}{4}\pi\right[$ und $g'(x) > 0$ für $x \in \left]\frac{1}{4}\pi, \frac{1}{2}\pi\right[$. Dies zeigt, dass g auf $[0, \frac{1}{4}\pi]$ streng monoton fallend und auf $[\frac{1}{4}\pi, \frac{1}{2}\pi]$ streng monoton wachsend ist. Für jedes $x \in [0, \frac{1}{4}\pi]$ gilt $\frac{1}{2}\pi > 1 = g(0) \geq g(x) \geq g(\frac{1}{4}\pi) = \frac{1}{\sqrt{2}} > 0$ und somit $g(x) \in [0, \frac{1}{2}\pi]$. Für jedes $x \in [\frac{1}{4}\pi, \frac{1}{2}\pi]$ ist $0 < \frac{1}{\sqrt{2}} = g(\frac{1}{4}\pi) \leq g(x) \leq g(\frac{1}{2}\pi) = \frac{1}{4}\pi < \frac{1}{2}\pi$, also ebenfalls $g(x) \in [0, \frac{1}{2}\pi]$. Damit ist $g([0, \frac{1}{2}\pi]) \subseteq [0, \frac{1}{2}\pi]$ nachgewiesen. Insgesamt ist g damit eine Kontraktion auf $[0, \frac{1}{2}\pi]$, mit einer Kontraktionskonstanten $\gamma = \frac{1}{4}\pi$.

zu (b) Nach (5.13) ist $|x_n - z| < 10^{-100}$ auf jeden Fall dann erfüllt, wenn

$$\frac{\gamma^n}{1-\gamma}|x^{(0)} - x^{(1)}| \quad < \quad 10^{-100} \qquad \text{gilt.}$$

Setzen wir $c = \frac{|x^{(0)} - x^{(1)}|}{1-\gamma} \in \mathbb{R}^+$, dann ist diese Ungleichung äquivalent zu

$$c\gamma^n < 10^{-100} \quad \Leftrightarrow \quad \ln(c) + n\ln(\gamma) < (-100)\ln(10) \quad \Leftrightarrow$$

$$n\ln(\gamma) < (-100)\ln(10) - \ln(c) \quad \Leftrightarrow \quad n > (-100)\frac{\ln(10)}{\ln(\gamma)} - \frac{\ln(c)}{\ln(\gamma)}.$$

Es gilt $\gamma = \frac{1}{4}\pi \approx 0{,}785$, $c = (1 - \gamma)(\frac{1}{4}\pi - g(\frac{1}{4}\pi)) = (1 - \gamma)(\frac{1}{4}\pi - \frac{1}{\sqrt{2}}) \approx 0{,}365$ und

$$(-100)\frac{\ln(10)}{\ln(\gamma)} - \frac{\ln(c)}{\ln(\gamma)} \quad \approx \quad 949,023$$

Also hat $n = 950$ die gewünschte Eigenschaft.