Analysis mehrerer Variablen

— Lösung Blatt 5 —

(Tutoriumsblatt)

Aufgabe 0

zu (a) Die induzierte Metrik d ist durch $d(v,w) = \|v-w\|$ für alle $v,w \in V$ definiert. Umgekehrt kann man aus einer Metrik durch $\|v\| = d(0_V, v)$ eine Norm machen, wenn d bereits durch eine Norm induziert ist. Man erhält dann einfach diese Norm zurück.

Aus einer beliebigen Metrik kann man aber auf diese Weise im Allgemeinen keine Norm gewinnen. Betrachtet man auf V zum Beispiel die diskrete Metrik δ_V, dann wäre $\|v\| = \delta_V(0_V, v) = 1$ für alle $v \in V \setminus \{0_V\}$. Für jeden Vektor $v \neq 0_V$ müsste dann $\|2v\| = 1$, wegen der Normeigenschaft aber zugleich auch $\|2v\| = 2\|v\| = 2$ gelten. Dies zeigt, dass die diskrete Metrik auf einem $\mathbb{R}$-Vektorraum $V \neq \{0_V\}$ keine Norm liefert.

zu (b) Aus der Linearen Algebra wissen wir, dass $\mathcal{M}_{2,\mathbb{R}}$ als $\mathbb{R}$-Vektorraum 4-dimensional und somit isomorph zum $\mathbb{R}^4$ ist. Wie wir in der Vorlesung gesehen haben, kann ein beliebiger Isomorphismus $\phi : \mathcal{M}_{2,\mathbb{R}} \to \mathbb{R}^4$ genutzt werden, um aus einer Norm $\|\cdot\|$ auf $\mathbb{R}^4$ eine Norm $\|\cdot\|'$ auf $\mathcal{M}_{2,\mathbb{R}}$ zu gewinnen, indem man nämlich $\|A\|' = \|\phi(A)\|$ setzt. Beispielsweise liefert die p-Norm für jedes $p \geq 1$ oder $p = \infty$ durch $\|A\|' = \|\phi(A)\|_p$ eine Norm auf $\mathcal{M}_{2,\mathbb{R}}$.

zu (c) Ist $(x^{(n)})$ eine Cauchyfolge in $\mathbb{R}$ bezüglich der diskreten Metrik $\delta_{\mathbb{R}}$, dann gibt es insbesondere für $\varepsilon = 1$ ein $N \in \mathbb{N}$, so dass $\delta_{\mathbb{R}}(x^{(m)}, x^{(n)}) < \varepsilon$ für alle $m,n \geq N$ erfüllt ist. Nach Definition der diskreten Metrik ist dies gleichbedeutend mit $x^{(m)} = x^{(n)}$ für alle $m,n \geq N$. Cauchyfolgen werden also nach endlich vielen Schritten konstant. Wie wir in der Vorlesung gesehen haben, sind umgekehrt Folgen mit dieser Eigenschaft in $(\mathbb{R}, \delta_{\mathbb{R}})$ konvergent, und somit insbesondere Cauchyfolgen. (Wir haben also zugleich auch gezeigt, dass $(\mathbb{R}, \delta_{\mathbb{R}})$ ein *vollständiger* metrischer Raum ist.)

zu (d) Wir betrachten in A die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegeben durch $x_n = \frac{1}{n}$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Aus der Analysis einer Variablen wissen wir, dass $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ im herkömmlichen Sinn (also im metrischen Raum $\mathbb{R}$ mit der Metrik d_0 gegeben durch $d(a,b) = |b-a|$) gegen 0 konvergiert. Außerdem wissen wir, dass konvergente Folgen Cauchyfolgen sind (ebenfalls im herkömmlichen Sinn). Aber daraus folgt, dass $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auch in (A,d) eine Cauchyfolge ist, denn für jedes $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ gibt es ein $N \in \mathbb{N}$ mit $d(x_m, x_n) = |x_n - x_m| < \varepsilon$ für alle $m,n \geq N$.

Nehmen wir nun an, dass $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ im metrischen Raum A gegen ein $a \in A$ konvergiert. Dann existiert für jedes $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ jeweils ein $N \in \mathbb{N}$, so dass $|x_n - a| = d(a, x_n) < \varepsilon$ für alle $n \geq N$ gilt. Aber daraus ergibt sich, dass $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auch im herkömmlichen Sinn gegen a konvergiert. Weil der herkömmliche Grenzwert der Folge im metrischen Raum $(\mathbb{R}, d_0)$ die Null ist, muss (auf Grund der Eindeutigkeit des Grenzwerts) $a = 0$ gelten. Aber a ist nicht in $\mathbb{R}$ enthalten, Widerspruch!

Aufgabe 1

zu (a) Wir überprüfen die Bedingungen (i) bis (iii) in der Definition einer Metrik.

zu (i) „$\Rightarrow$" Seien $x, y \in V$ mit $d(x,y) = 0$. Wegen $d(x,y) \neq 1$ muss $\|x-y\|_2 < 1$ gelten. Wir erhalten $\|x-y\|_2 = d(x,y) = 0$ und somit $x - y = 0$ und $x = y$. „$\Leftarrow$" Ist $x = y$, dann folgt $\|x-y\|_2 = 0$, insbesondere $\|x-y\|_2 < 1$ und damit $d(x,y) = \|x-y\|_2 = 0$.

zu (ii) Seien $x, y \in V$ vorgegeben. Wir unterscheiden zwei Fälle. Ist $\|x-y\|_2 < 1$, dann gilt auch $\|y-x\|_2 = \|(-1)(x-y)\|_2 = |-1|\|x-y\|_2 = \|x-y\|_2 < 1$ und somit $d(x,y) = \|x-y\|_2 = \|y-x\|_2 = d(y,x)$. Gilt dagegen $\|x-y\|_2 \geq 1$, dann ist auch $\|y-x\|_2 \geq 1$ und $d(x,y) = 1 = d(y,x)$.

zu (iii) Seien $x, y, z \in V$ vorgegeben. Wir betrachten zunächst den Fall, dass $\|x-y\|_2 < 1$ und $\|y-z\|_2 < 1$ gilt. Nach Definition von d gilt $d(x,z) \leq \|x-z\|_2$ unabhängig davon, ob $\|x-z\|_2 < 1$ oder $\|x-z\|_2 \geq 1$ ist. Wir erhalten somit $d(x,z) \leq \|x-z\|_2 \leq \|x-y\|_2 + \|y-z\|_2 = d(x,y) + d(y,z)$. Setzen wir nun $\|x-y\|_2 \geq 1$ oder $\|y-z\|_2 \geq 1$ voraus. Dann ist $d(x,y) + d(y,z) \geq 1$. Wir erhalten $d(x,z) \leq 1 \leq d(x,y) + d(y,z)$.

zu (b) Nehmen wir an, dass d durch eine Norm $\|\cdot\|$ induziert ist. Sei $v \in V$ ein Vektor mit $\|v\|_2 \geq 1$. Dann gilt $d(0_V, v) = 1$ nach Definition von d, und wegen $\|2v\|_2 = 2\|v\|_2 \geq 2 \geq 1$ ist auch $d(0_V, 2v) = 1$. Wegen $v \neq 0_V$ ist außerdem $\|v\| \neq 0$. Ingesamt erhalten wir

$$2\|v\| \quad = \quad \|2v\| \quad = \quad d(0_V, 2v) \quad = \quad 1 \quad = \quad d(0_V, v) \quad = \quad \|v\| \quad ,$$

und Division durch $\|v\|$ liefert die Gleichung $2 = 1$. Dies zeigt, dass die Annahme falsch war.

zu (c) Weil die hier angegebene Metrik nur Werte aus dem Intervall $[0,1]$ annehmen kann, ist jede Folge in (V, d) beschränkt. Würde der Satz von Bolzano-Weierstrass hier gelten, dann müsste also jede Folge konvergent sein. Aber die Folge $(ne_1)_{n \in \mathbb{N}}$ bestehend aus den Vielfachen des Einheitsvektors e_1 ist offenbar divergent, denn für alle $m, n \in \mathbb{N}$ mit $m < n$ gilt $\|ne_1 - me_1\|_2 = (n-m)\|e_1\|_2 = (n-m) \geq 1$ und somit $d(me_1, ne_1) = 1$. Setzen wir also $\varepsilon = 1$, dann gibt es kein $N \in \mathbb{N}$ mit der Eigenschaft, dass $d(me_1, ne_1) < \varepsilon$ für alle $m, n \geq N$ erfüllt ist. Die Folge ist also keine Cauchyfolge und somit laut Vorlesung erst recht nicht konvergent.

Aufgabe 2

zu (a) Sei zunächst $r = \frac{1}{2}$. Ist $x \in V$ ein Vektor mit $d(0_V, x) \leq \frac{1}{2} < 1$, dann muss $\|x\|_2 < 1$ und $d(0_V, x) = \|x\|$ gelten. Daraus folgt $B_{\frac{1}{2}}(0_V) = \{x \in V \mid \|x\|_2 < \frac{1}{2}\}$ und $\bar{B}_{\frac{1}{2}}(0_V) = \{x \in V \mid \|x\|_2 \leq \frac{1}{2}\}$. Also ist $B_{\frac{1}{2}}(0_V)$ der offenen Ball vom Radius $\frac{1}{2}$ bezüglich der gewöhnlichen 2-Norm, und $\bar{B}_{\frac{1}{2}}(0_V)$ ist der abgeschlossene Ball vom Radius $\frac{1}{2}$ bezüglich dieser Norm.

Nun betrachten wir $r = 1$. ist $x \in V$ mit $d(0_V, x) < 1$, dann gilt $\|x\|_2 < 1$ und $d(0_V, x) = \|x\|_2$. Daraus folgt $B_1(0_V) = \{x \in V \mid \|x\|_2 < 1\}$. Andererseits gilt $d(0_V, x) \leq 1$ für alle $x \in V$. Daraus folgt $\bar{B}_1(0_V) = V$.

Sei nun $r = 2$. Die Ungleichung $d(0_V, x) < 2$ ist für alle $x \in V$ erfüllt, erst recht die Ungleichung $d(0_V, x) \leq 2$. Daraus folgt $B_2(0_V) = \bar{B}_2(0_V) = V$.

zu (b) Sei $a \in V$ beliebig vorgegeben. Wir zeigen

$$\begin{array}{rl} \text{(i)} & B_r(a) = \{x \in V \mid \|x-a\|_2 < r\} \text{ für } r \leq 1 \\ \text{(ii)} & B_r(a) = V \text{ für } r > 1 \\ \text{(iii)} & \bar{B}_r(a) = \{x \in V \mid \|x-a\|_2 \leq r\} \text{ für } r < 1 \\ \text{(iv)} & \bar{B}_r(a) = V \text{ für } r \geq 1 \end{array}$$

zu (i) „$\subseteq$" Ist $x \in B_r(a)$, dann gilt $d(a,x) < 1$ und somit $\|x-a\|_2 = d(a,x) \leq r$. „$\supseteq$" Sei $x \in V$ mit $\|x-a\|_2 < r \leq 1$. Dann folgt $d(a,x) = \|x-a\|_2 < r$ und $x \in B_r(a)$.

zu (ii) Die Inklusion „$\subseteq$" ist offensichtlich. Da $d(a,x) \leq 1 < r$ für jedes $x \in V$ gilt, ist auch $V \subseteq B_r(a)$ erfüllt.

zu (iii) „$\subseteq$" Ist $x \in B_r(a)$ mit $d(a,x) \leq r < 1$, dann gilt $d(a,x) = \|x-a\|_2$ und somit $\|x-a\|_2 = d(a,x) \leq r$. „$\supseteq$" Ist $x \in V$ mit $\|x-a\|_2 \leq r < 1$, dann folgt $d(a,x) = \|x-a\|_2 \leq r$.

zu (iv) Hier ist die Inklusion „$\subseteq$" wieder offensichtlich. Umgekehrt gilt $d(a,x) \leq 1 \leq r$ für $x \in V$ und somit $V \subseteq \bar{B}_r(a)$.

Aufgabe 3

zu (a) Zunächst beweisen wir für $\|\cdot\|_1$ die Eigenschaften (i) bis (iii) in der Normdefinition.

zu (i) „$\Rightarrow$" Für $f = 0_V$ ist $\|0_V\|_1 = \int_0^1 |0| \, dx = 0$. „$\Leftarrow$" Vorausgesetzt ist $\|f\|_1 = 0$; nehmen wir an, dass $f \neq 0_V$ ist. Dann gibt es einen Punkt $c \in [0,1]$ mit $f(c) \neq 0$. Wir setzen zunächst voraus, dass $c < 1$ gilt, und setzen $\varepsilon = |f(c)|$. Mit f ist auch die Funktion $|f|$ gegeben durch $|f|(x) = |f(x)|$ stetig, und auf Grund dieser Stetigkeit gibt es ein $\delta \in \mathbb{R}^+$, so dass $||f(x)| - |f(c)|| < \frac{1}{2}\varepsilon$ für alle $x \in [0,1]$ mit $|x-c| < \delta$. Nach eventueller Verkleinerung von δ können wir $c + \delta \leq 1$ annehmen. Inbesondere gilt dann $|f(x)| \geq \frac{1}{2}\varepsilon$ für alle $x \in [c, c+\delta]$, und es folgt

$$\|f\|_1 \quad = \quad \int_0^1 |f(x)| \, dx \quad \geq \quad \int_c^{c+\delta} |f(x)| \, dx \quad \geq \quad \delta \cdot \frac{1}{2}\varepsilon \quad > \quad 0 \quad ,$$

insbesondere also $\|f\|_1 \neq 0$, im Widerspruch zur Voraussetzung. Im Fall $c = 1$ verläuft der Beweis analog, an Stelle von $[c, c+\delta]$ muss lediglich ein Intervall der Form $[1-\delta, 1]$ mit $\delta \leq 1$ betrachtet werden.

zu (ii) Seien $\lambda \in \mathbb{R}$ und $f \in V$ vorgegeben. Dann gilt

$$\|\lambda f\|_1 \quad = \quad \int_0^1 |\lambda f(x)| \, dx \quad = \quad |\lambda| \int_0^1 |f(x)| \, dx \quad = \quad |\lambda| \|f\|_1.$$

zu (iii) Seien $f, g \in V$ vorgegeben. Für jedes $x \in [0,1]$ gilt $|(f+g)(x)| = |f(x) + g(x)| \leq |f(x)| + |g(x)|$. Daraus folgt

$$\begin{aligned} \|f+g\|_1 \quad &= \quad \int_0^1 |(f+g)(x)| \, dx \quad \leq \quad \int_0^1 (|f(x)| + |g(x)|) \, dx \\ &= \quad \int_0^1 |f(x)| \, dx + \int_0^1 |g(x)| \, dx \quad = \quad \|f\|_1 + \|g\|_1. \end{aligned}$$

Nun beweisen wir die Normeigenschaften noch für $\|\cdot\|_\infty$.

zu (i) „⇒“ Es gilt $\|0_V\|_\infty = \sup\{|0_V(x)| \mid x \in [0,1]\} = \sup\{0\} = 0$. „⇐“ Ist $f \in V$ mit $\|f\|_\infty = 0$, dann ist $\sup\{|f(x)| \mid x \in [0,1]\} = 0$. Es gilt also $0 \le |f(x)| \le 0$ für alle $x \in [0,1]$. Daraus folgt $f(x) = 0$ für alle $x \in [0,1]$, also $f = 0_V$.

zu (ii) Seien $\lambda \in \mathbb{R}$ und $f \in V$ vorgegeben. Nach dem Maximumsprinzip aus der Analysis einer Variablen gibt es ein $x_0 \in [0,1]$ mit $|f(x_0)| = \sup\{|f(x)| \mid x \in [0,1]\} = \|f\|_\infty$. Für alle $x \in [0,1]$ gilt also $|(\lambda f)(x)| = |\lambda||f(x)| \le |\lambda||f(x_0)|$, und außerdem $|(\lambda f)(x_0)| = |\lambda||f(x_0)|$. Daraus folgt $\|\lambda f\|_\infty = \sup\{|(\lambda f)(x)| \mid x \in [0,1]\} = |\lambda||f(x_0)| = |\lambda|\|f\|_\infty$.

zu (iii) Seien $f, g \in V$ vorgegeben. Wiederum auf Grund des Maximumsprinzips gibt es ein $x_0 \in [0,1]$ mit $|(f+g)(x_0)| = \sup\{|(f+g)|(x) \mid x \in [0,1]\} = \|f+g\|_\infty$. Es gilt nun

$$\begin{aligned} \|f+g\|_\infty \quad = \quad |(f+g)(x_0)| \quad \le \quad |f(x_0)| + |g(x_0)| \quad \le \\ \sup\{|f(x)| \mid x \in [0,1]\} + \sup\{|g(x)| \mid x \in [0,1]\} \quad = \quad \|f\|_\infty + \|g\|_\infty. \end{aligned}$$

zu (b) Sei $f \in V$ vorgegeben. Nach dem Maximumsprinzip gibt es für $f \in V$ ein $x_0 \in [0,1]$ mit $|f(x_0)| = \sup\{|f(x)| \mid x \in [0,1]\} = \|f\|_\infty$. Es gilt also $|f(x)| \le |f(x_0)|$ für alle $x \in [0,1]$. Wir erhalten

$$\|f\|_1 \quad = \quad \int_0^1 |f(x)|\, dx \quad \le \quad \int_0^1 |f(x_0)|\, dx \quad = \quad |f(x_0)|(1-0) \quad = \quad |f(x_0)| \quad = \quad \|f\|_\infty.$$

zu (c) Für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt $\|f_n\|_1 = \int_0^1 |x^n|\ dx = \int_0^1 x^n\ dx = [\frac{1}{n+1}x^{n+1}]_0^1 = \frac{1}{n+1}$. Andererseits gilt $f_n(1) = 1$ und $f_n(x) = x^n \le 1$ für alle $x \in [0,1]$, und daraus folgt $\|f_n\|_\infty = 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Nehmen wir nun an, es gibt eine Konstante $\gamma \in \mathbb{R}^+$ mit $\|f\|_\infty \le \gamma \|f\|_1$ für alle $f \in V$. Dann gilt insbesondere $\|f_n\|_\infty \le \gamma \|f_n\|_1$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Durch Einsetzen der Werte von $\|f_n\|_\infty$ und $\|f_n\|_1$ erhalten wir $1 \le \gamma \frac{1}{n+1}$ und somit $n+1 \le \gamma$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Aber dies ist offenbar unmöglich, da $\mathbb{N}$ eine unbeschränkte Teilmenge von $\mathbb{R}$ ist.