

Analysis mehrerer Variablen (LA Gym)

— Lösung Blatt 5 —

(Globalübungsblatt)

Aufgabe 1

zu (a) Die folgenden Bedingungen sind für alle $x, y, z \in V$ zu überprüfen.

(i) $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$

(ii) $d(x, y) = d(y, x)$

(iii) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$

zu (i) „ $\Leftarrow$ “ Ist $x = y$, dann gilt $d(x, y) = 0$ nach Definition von d . „ $\Rightarrow$ “ Setzen wir $d(x, y) = 0$ voraus, dann muss $x = y$ gelten, denn im Fall $x \neq y$ ist $d(x, y) \in \{1, 2\}$ nach Definition von d .

zu (ii) „ $\Rightarrow$ “ Wir unterscheiden drei Fälle. Ist $x = y$, dann gilt $d(x, y) = 0 = d(y, x)$. Setzen wir nun $x \neq y$ und $\|x - y\| \leq 1$ voraus. Dann gilt $d(x, y) = 1$. Andererseits ist auch $y \neq x$ und $\|y - x\| = \|(-1)(x - y)\| = |-1|\|x - y\| = \|x - y\| \leq 1$. Daraus folgt $d(y, x) = 1$, insgesamt also $d(x, y) = 1 = d(y, x)$. Setzen wir nun $\|x - y\| > 1$ voraus. Dann gilt $d(x, y) = 2$. Wegen $\|y - x\| = \|x - y\| > 1$ ist auch $d(y, x) = 2$, also $d(x, y) = 2 = d(y, x)$.

zu (iii) Ist $d(x, y) + d(y, z) \geq 2$, dann ist die Ungleichung $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ auf jeden Fall erfüllt, denn $d(x, z)$ kann nur die Werte 0, 1 oder 2 annehmen. Im Fall $d(x, y) + d(y, z) \leq 1$ muss $d(x, y) = 0$ oder $d(y, z) = 0$ gelten. Ist $d(x, y) = 0$, dann folgt $x = y$ und $d(x, z) = d(y, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$. Ist $d(y, z) = 0$, dann folgt $y = z$ und $d(x, z) = d(x, y) \leq d(x, y) + d(y, z)$. Also ist die Ungleichung in jedem Fall erfüllt.

zu (b) „ $\Rightarrow$ “ Setzen wir $\lim_n x^{(n)} = a$ voraus (wobei die Konvergenz bezüglich der Metrik d gemeint ist), dann existiert insbesondere ein $N \in \mathbb{N}$ mit $d(a, x^{(n)}) < 1$ für alle $n \geq N$. Weil $d(a, x^{(n)})$ nur die Werte 0, 1 oder 2 annimmt, folgt daraus $d(a, x^{(n)}) = 0$ für alle $n \geq N$. Dies wiederum bedeutet $x^{(n)} = a$ für alle $n \geq N$.

„ $\Leftarrow$ “ Sei $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ vorgegeben. Nach Voraussetzung gibt es ein $N \in \mathbb{N}$ mit $x^{(n)} = a$ für alle $n \geq N$. Es folgt $d(a, x^{(n)}) = d(a, a) = 0 < \varepsilon$ für alle $n \geq N$. Damit ist $\lim_n x^{(n)} = a$ nachgewiesen.

zu (c) Nehmen wir an, dass $\|\cdot\|'$ eine Norm auf V mit $d(v, w) = \|w - v\|' = 0$ für alle $v, w \in V$ (die von der Norm $\|\cdot\|$ aus der Angabe verschieden sein kann). Wegen $V \neq \{0_V\}$ existiert in V ein Vektor $v \neq 0_V$. Es gilt dann $\|v\|' = d(0_V, v) \in \{1, 2\}$. Für den Vektor $3v$ erhalten wir dann $d(0_V, 3v) = \|3v\|' = 3\|v\|' \in \{3, 6\}$. Aber dies steht im Widerspruch dazu, dass d nur die Werte 0, 1 und 2 annimmt.

Aufgabe 2

zu (a) Seien a und b zwei verschiedene Häufungspunkte der Folge $(x^{(n)})_{n \in \mathbb{N}}$, und nehmen wir an, dass außerdem der Grenzwert $c = \lim_n x^{(n)}$ der Folge existiert. Nehmen wir an, es ist $a \neq c$; dann ist $\varepsilon = d(a, c)$ positiv. Nach Definition der Konvergenz gibt es ein $N \in \mathbb{N}$ mit $d(c, x^{(n)}) < \frac{1}{2}\varepsilon$ für alle $n \geq N$. Weil a Häufungspunkt ist, gilt $d(a, x^{(n)}) < \frac{1}{2}\varepsilon$ für unendlich viele $n \in \mathbb{N}$. Insbesondere muss es ein $n \geq N$ mit dieser Eigenschaft geben. Es folgt dann $\varepsilon = d(a, c) \leq d(a, x^{(n)}) + d(x^{(n)}, c) < \frac{1}{2}\varepsilon + \frac{1}{2}\varepsilon = \varepsilon$, ein Widerspruch. Also muss $a = c$ gelten, und genauso erhält man $b = c$. Insgesamt folgt $a = c = b$, im Widerspruch zu $a \neq b$. Somit kann eine Folge mit zwei verschiedenen Häufungspunkten nicht konvergieren.

zu (b) Sei $(x^{(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in X . Wir bezeichnen mit $x_i^{(n)}$ für $i = 1, 2, 3$ jeweils die drei Komponenten von $x^{(n)}$, es gilt also $x^{(n)} = (x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, x_3^{(n)})$ für jedes $n \in \mathbb{N}$. Alle drei Folgen $(x_i^{(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ ($i = 1, 2, 3$) sind in $[0, 1]$ enthalten. Nach dem Satz von Bolzano-Weierstrass hat $(x_1^{(n)})$ eine konvergente Teilfolge $(x_1^{(n_k)})_{k \in \mathbb{N}}$. Wenden wir den Satz von Bolzano-Weierstrass nun auf die Folge $(x_2^{(n_k)})_{k \in \mathbb{N}}$ an. Auch diese besitzt eine konvergente Teilfolge. Nach Ersetzung von $(n_k)_{k \in \mathbb{N}}$ durch eine Teilfolge können wir also davon ausgehen, dass $(x_1^{(n_k)})_{k \in \mathbb{N}}$ und $(x_2^{(n_k)})_{k \in \mathbb{N}}$ beide konvergieren. Wenden wir den Satz von Bolzano-Weierstrass noch auf $(x_3^{(n_k)})_{k \in \mathbb{N}}$ an und ersetzen $(n_k)_{k \in \mathbb{N}}$ nochmals durch eine entsprechende Teilfolge, dann können wir danach davon ausgehen, dass alle drei Folge $(x_i^{(n_k)})_{k \in \mathbb{N}}$ ($i = 1, 2, 3$) konvergieren, die drei Grenzwerte

$$a_1 = \lim_{k \rightarrow \infty} x_1^{(n_k)}, \quad a_2 = \lim_{k \rightarrow \infty} x_2^{(n_k)} \quad \text{und} \quad a_3 = \lim_{k \rightarrow \infty} x_3^{(n_k)}$$

also alle in $\mathbb{R}$ existieren.

Sei nun $a = (a_1, a_2, a_3)$. Wegen $0 \leq x_i^{(n_k)} \leq 1$ für alle $k \in \mathbb{N}$ gilt jeweils $0 \leq a_i \leq 1$, für $i = 1, 2, 3$. Also ist a in $X = [0, 1]^3$ enthalten. Wir zeigen nun, dass a ein Häufungspunkt von $(x^{(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ im metrischen Raum (X, d) ist. Sei dazu $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ vorgegeben. Auf Grund der Konvergenzen gibt es $K_1, K_2, K_3 \in \mathbb{N}$, so dass jeweils $|x_i^{(n_k)} - a_i| < \frac{1}{\sqrt{3}}\varepsilon$ für alle $k \geq K_i$ erfüllt ist, für $i = 1, 2, 3$. Setzen wir $K = \max\{K_1, K_2, K_3\}$ und $a = (a_1, a_2, a_3) \in \mathbb{R}^3$, dann gilt

$$\|x^{(n_k)} - a\|_2^2 = |x_1^{(n_k)} - a_1|^2 + |x_2^{(n_k)} - a_2|^2 + |x_3^{(n_k)} - a_3|^2 < \frac{1}{3}\varepsilon^2 + \frac{1}{3}\varepsilon^2 + \frac{1}{3}\varepsilon^2 = \varepsilon^2$$

und somit $d(a, x^{(n_k)}) = \|x^{(n_k)} - a\|_2 < \varepsilon$ für alle $k \geq K$. Es gibt also unendlich viele $n \in \mathbb{N}$ mit $d(a, x^{(n)}) < \varepsilon$. Weil $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ beliebig vorgegeben war, folgt daraus, dass a ein Häufungspunkt von $(x^{(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ ist.

Aufgabe 3

Angenommen, die Normen $\|\cdot\|$ und $\|\cdot\|'$ sind äquivalent. Dann gibt es eine Konstante $\gamma \in \mathbb{R}^+$ mit $\|v\|' \leq \gamma\|v\|$ für alle $v \in V$. Insbesondere gilt dann $\|x^{(n)}\|' \leq \gamma\|x^{(n)}\|$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Wegen $\lim_n \|x^{(n)}\| = 0$ gibt es ein $N \in \mathbb{N}$ mit $\|x^{(n)}\| < \gamma^{-1}$ für alle $n \geq N$. Es folgt $\|x^{(n)}\|' = \gamma\|x^{(n)}\| \leq \gamma\gamma^{-1} < 1$ für alle $n \geq N$. Aber dies steht im Widerspruch zur Voraussetzung $\|x^{(n)}\|' \geq 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$.