

# Analysis mehrerer Variablen

## — Lösung Blatt 4 —

(Tutoriumsblatt)

### Aufgabe 0

zu (a) Eine Norm auf einem  $\mathbb{R}$ -Vektorraum  $V$  ist eine Abbildung  $\|\cdot\| : V \rightarrow \mathbb{R}_+$ , die die Bedingungen  $\|v\| = 0 \Leftrightarrow v = 0_V$ ,  $\|\lambda v\| = |\lambda|\|v\|$  und  $\|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|$  für alle  $v, w \in V$  und  $\lambda \in \mathbb{R}$  erfüllt. Auf  $V = \mathbb{R}^n$  ist die euklidische Norm durch  $\|v\| = \sqrt{\langle v, v \rangle}$  definiert. Ist allgemeiner  $b$  ein Skalarprodukt auf  $V$  (also eine positiv definite Bilinearform), dann ist durch  $\|v\|_b = \sqrt{b(v, v)}$  eine Norm definiert. Neben der euklidischen Norm gibt es auf dem  $\mathbb{R}^n$  die  $p$ -Norm  $\|\cdot\|_p$  für jedes  $p \in \mathbb{R}$  mit  $p \geq 1$ , und außerdem die Supremumsnorm  $\|\cdot\|_\infty$ .

zu (b) Der abgeschlossene Ball vom Radius  $r$  um den Punkt  $v$  besteht aus allen  $w \in V$  mit  $\|w - v\| \leq r$ .

zu (c) Im Fall  $V = \{0_V\}$  ist  $v = 0_V$ , und in diesem Fall gilt tatsächlich  $\bar{B}_{\|\cdot\|, r}(v) = \{v\}$  und  $\bar{B}_{\|\cdot\|, r}(v) = V$ . Ist die Dimension von  $V$  größer als Null, ist aber beides unmöglich. In diesem Fall gibt es nämlich einen Vektor  $w \in V$  mit  $w \neq v$ . Setzen wir  $s = \|w - v\|$ , dann ist  $s > 0$  und  $v + s^{-1}r(w - v) \in \bar{B}_{\|\cdot\|, r}(v) \setminus \{v\}$  wegen  $\|(v + s^{-1}r(w - v)) - v\| = s^{-1}r\|w - v\| = r$ . Der Vektor  $v + 2s^{-1}r(w - v)$  liegt dagegen außerhalb von  $\bar{B}_{\|\cdot\|, r}(v)$  wegen  $\|(v + 2s^{-1}r(w - v)) - v\| = 2s^{-1}r\|w - v\| = 2r > r$ .

zu (d) Zunächst wählt man einen beliebigen Vektor  $v \in V \setminus U$ . Dieser wird mit der Formel  $\pi_U(v) = b(v_1, v)v_1 + \dots + b(v_{n-1}, v)v_{n-1}$  orthogonal auf  $U$  projiziert. Dann bildet man die Differenz  $v - \pi_U(v)$ . Anschließend wird diese Differenz durch Skalierung mit  $\|v - \pi_U(v)\|^{-1}$  auf Länge 1 gebracht. Der so erhaltene Vektor erweitert  $(v_1, \dots, v_{n-1})$  zu einer ON-Basis von  $V$ .

### Aufgabe 1

zu (a) Zunächst berechnen wir das charakteristische  $\chi_A = \det(xE^{(3)} - A)$  mit Hilfe der Sarrus-Regel. Damit bei der Rechnung keine Brüche vorkommen, berechnen wir zunächst  $4^3 \cdot \chi_A = \det(4xE^{(3)} - 4A)$  und multiplizieren das Ergebnis anschließend mit  $4^{-3} = \frac{1}{64}$ .

$$\begin{aligned} \det \begin{pmatrix} 4x-5 & 0 & -\sqrt{3} \\ 0 & 4x-4 & 0 \\ -\sqrt{3} & 0 & 4x-7 \end{pmatrix} &= \\ (4x-5)(4x-4)(4x-7) + 0 + 0 - ((-\sqrt{3})(4x-4)(-\sqrt{3})) - 0 - 0 &= \\ (64x^3 - 256x^2 + 332x - 140) - (12x - 12) &= 64x^3 - 256x^2 + 320x - 128. \end{aligned}$$

Wir erhalten  $\chi_A = x^3 - 4x^2 + 5x - 2$ . Durch probeweises Einsetzen erhalten wir die Nullstelle 1 von  $\chi_A$ . Einsetzen in die Ableitung  $\chi'_A(x) = 3x^2 - 8x + 5$  zeigt, dass 1 mindestens eine doppelte Nullstelle von  $\chi_A$  ist. Polynomdivision von  $\chi_A$  durch  $(x-1)^2$  liefert die Zerlegung  $\chi_A = (x-1)^2(x-2)$ . Also sind 1 und 2 die beiden Eigenwerte von  $A$ .

zu (b) Zunächst berechnen wir eine Basis von  $\text{Eig}(A, 1) = \ker(A - E^{(3)})$ .

$$\frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \sqrt{3} \\ 0 & 0 & 0 \\ \sqrt{3} & 0 & 3 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 & \sqrt{3} \\ 0 & 0 & 0 \\ \sqrt{3} & 0 & 3 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 & \sqrt{3} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

An der normierten Zeilenstufenform lesen wir ab, dass  $\{(0, 1, 0), (-\sqrt{3}, 0, 1)\}$  eine Basis von  $\text{Eig}(A, 1)$  ist.

Nun berechnen wir eine Basis von  $\text{Eig}(A, 2) = \ker(A - 2E^{(3)})$ .

$$\begin{aligned} \frac{1}{4} \begin{pmatrix} -3 & 0 & \sqrt{3} \\ 0 & -4 & 0 \\ \sqrt{3} & 0 & -1 \end{pmatrix} &\mapsto \begin{pmatrix} -3 & 0 & \sqrt{3} \\ 0 & -4 & 0 \\ \sqrt{3} & 0 & -1 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} -3 & 0 & \sqrt{3} \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -\frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} \mapsto \\ &\begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & \sqrt{3} \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Hier erhalten wir die Basis  $\{(\frac{1}{\sqrt{3}}, 0, 1)\}$ .

zu (c) Der einzige Vektor in der Basis  $\{(\frac{1}{\sqrt{3}}, 0, 1)\}$  von  $\text{Eig}(A, 2)$  hat Länge  $\sqrt{(\frac{1}{\sqrt{3}})^2 + 0^2 + 1^2} = \frac{2}{\sqrt{3}}$ , somit ist  $((\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}\sqrt{3}))$  eine ON-Basis von  $\text{Eig}(A, 2)$ .

Der Vektor  $(0, 1, 0)$  in der Basis von  $\text{Eig}(A, 1)$  ist bereits normiert. Nach dem Gram-Schmidt-Verfahren müsste nun der zweite Vektor  $(-\sqrt{3}, 0, 1)$  orthogonal auf den Untervektorraum  $\text{lin}((0, 1, 0))$  projiziert werden. Da aber die beiden Vektoren zufällig bereits orthogonal zueinander sind, genügt es, den zweiten Vektor zu normieren. Es gilt  $\|(-\sqrt{3}, 0, 1)\| = \sqrt{(-\sqrt{3})^2 + 0^2 + 1^2} = \sqrt{4} = 2$ . Also ist  $((0, 1, 0), (-\frac{1}{2}\sqrt{3}, 0, \frac{1}{2}))$  eine ON-Basis von  $\text{Eig}(A, 1)$ .

zu (d) Wir fassen die Basen von  $\text{Eig}(A, 1)$  und  $\text{Eig}(A, 2)$  zu einer geordneten Basis

$$\mathcal{B} = ((0, 1, 0), (-\frac{1}{2}\sqrt{3}, 0, \frac{1}{2}), (\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}\sqrt{3}))$$

von  $\mathbb{R}^3$  zusammen. Die Vektoren aus  $\mathcal{B}$  sind alle normiert und paarweise orthogonal zueinander. (Dies ist bei dieser Vorgehensweise automatisch der Fall, denn wir haben in jedem Eigenraum eine ON-Basis konstruiert, und aus dem Satz von der Hauptachsentransformation ergibt sich, dass Eigenräume zu verschiedenen Eigenwerten bei einer symmetrischen Matrix immer senkrecht aufeinander stehen.) Tragen wir nun die Elemente von  $\mathcal{B}$  als Spalten in einer Matrix  $T$  ein

$$T = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2}\sqrt{3} & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\sqrt{3} \end{pmatrix}$$

so ist diese Matrix laut Vorlesung orthogonal. Außerdem ist

$$D = {}^tTAT = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

eine Diagonalmatrix.

## Aufgabe 2

zu (a) Die Orthogonalität von  $D_\alpha$  erhalten wir durch die Rechnung

$$\begin{aligned} {}^t D_\alpha D_\alpha &= \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & \sin(\alpha) & 0 \\ -\sin(\alpha) & \cos(\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) & 0 \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} \cos(\alpha)^2 + \sin(\alpha)^2 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\alpha)^2 + \sin(\alpha)^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I^{(3)}. \end{aligned}$$

Ein beliebiger Vektor  $v \in \text{lin}(e_1, e_2)$  hat die Form  $v = (v_1, v_2, 0)$  mit  $v_1, v_2 \in \mathbb{R}$ . Es gilt

$$D_\alpha v = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) & 0 \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 \cos(\alpha) - v_2 \sin(\alpha) \\ v_1 \sin(\alpha) + v_2 \cos(\alpha) \\ 0 \end{pmatrix}$$

und

$$\begin{aligned} \langle v, D_\alpha v \rangle &= \left\langle \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} v_1 \cos(\alpha) - v_2 \sin(\alpha) \\ v_1 \sin(\alpha) + v_2 \cos(\alpha) \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle = \\ v_1(v_1 \cos(\alpha) - v_2 \sin(\alpha)) + v_2(v_1 \sin(\alpha) + v_2 \cos(\alpha)) &= v_1^2 \cos(\alpha) + v_2^2 \cos(\alpha) = \\ (v_1^2 + v_2^2) \cos(\alpha) &= \|v\|^2 \cos(\alpha). \end{aligned}$$

Außerdem gilt, wie man unmittelbar nachrechnet,  $\|D_\alpha v\| = \|v\|$ . Wir erhalten

$$\cos \angle(v, D_\alpha v) = \frac{\langle v, D_\alpha v \rangle}{\|v\| \|D_\alpha v\|} = \frac{\|v\|^2 \cos(\alpha)}{\|v\|^2} = \cos(\alpha).$$

Wegen  $\alpha \in [0, \pi]$  und  $\angle(v, D_\alpha v) \in [0, \pi]$  folgt daraus  $\angle(v, D_\alpha v) = \alpha$ .

zu (b) Laut Vorlesung kann für die Ebene  $E_1$  eine ON-Basis  $(v_1, v_2)$  gewählt werden, die sich mit dem Gram-Schmidt-Verfahren zu einer ON-Basis  $(v_1, v_2, v_3)$  von  $\mathbb{R}^3$  erweitern lässt. Ebenso lässt sich eine beliebige ON-Basis  $(w_1, w_2)$  von  $E_2$  zu einer ON-Basis  $(w_1, w_2, w_3)$  von  $\mathbb{R}^3$  erweitern. Seien  $T, U \in \text{GL}_3(\mathbb{R})$  die Matrizen mit den Spaltenvektoren  $v_1, v_2, v_3$  bzw.  $w_1, w_2, w_3$ . Dann sind  $T$  und  $U$  laut Vorlesung orthogonal. Außerdem gilt  $T(e_i) = v_i$  und  $U(e_i) = w_i$  für  $i = 1, 2, 3$ .

Weil die orthogonalen Matrizen laut Vorlesung eine Gruppe bilden, ist auch  $V = UT^{-1}$  eine orthogonale Matrix. Es gilt  $V(v_i) = (UT^{-1})(v_i) = U(e_i) = w_i$  für  $i = 1, 2, 3$ . Also wird die Basis  $\{v_1, v_2\}$  von  $E_1$  durch  $\phi: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, x \mapsto Vx$  auf die Basis  $\{w_1, w_2\}$  von  $E_2$  abgebildet. Daraus folgt  $\phi(E_1) = E_2$ . Weil  $V$  eine orthogonale Matrix ist und  $\mathcal{M}_{\mathcal{E}}(\phi) = V$  gilt, handelt es sich bei  $\phi$  um eine orthogonale Abbildung.

### Aufgabe 3

„ $\Leftarrow$ “ Nehmen wir an, dass im Durchschnitt  $\bar{B}_{\|\cdot\|,r}(v) \cap \bar{B}_{\|\cdot\|,s}(w)$  ein Punkt  $x$  existiert. Wegen  $x \in \bar{B}_{\|\cdot\|,r}(v)$  gilt  $\|x - v\| \leq r$ , wegen  $x \in \bar{B}_{\|\cdot\|,s}(w)$  andererseits  $\|x - w\| \leq s$ . Insgesamt erhalten wir  $\|w - v\| = \|(w - x) + (x - v)\| \leq \|w - x\| + \|x - v\| \leq r + s$ .

„ $\Rightarrow$ “ Nehmen wir an, dass  $\|w - v\| \leq r + s$  gilt. Nach eventueller Vertauschung von  $v, w$  und  $r, s$  können wir auch  $r \leq s$  annehmen. Wir konstruieren einen Punkt, der im Durchschnitt von  $\bar{B}_{\|\cdot\|,r}(v)$  und  $\bar{B}_{\|\cdot\|,s}(w)$  liegt. Sei  $u = \frac{1}{\|w - v\|}(w - v)$  und  $x = v + ru$ . Dann gilt einerseits

$$\|x - v\| = \|v + ru - v\| = r\|u\| = r \cdot 1 = r,$$

also  $x \in \bar{B}_{\|\cdot\|,r}(v)$ , andererseits aber auch

$$\begin{aligned} \|x - w\| &= \|v + ru - w\| = \left\| v + \frac{r}{\|w - v\|}(w - v) - w \right\| = \left\| \left( \frac{r}{\|w - v\|} - 1 \right) (w - v) \right\| = \\ &= \left| \frac{r - \|w - v\|}{\|w - v\|} \right| \cdot \|w - v\| = |r - \|w - v\|| \leq s \end{aligned}$$

also auch  $x \in \bar{B}_{\|\cdot\|,s}(w)$ .