

$\chi_A = (x+1)^2(x-3)^2$, einzige Eigenwerte sind -1 und 3

Aufgabe 1 geg. symmetrische Matrix $A \in M_4(\mathbb{R})$

gesucht: orthogonale Matrix $T \in GL_4(\mathbb{R})$,

so dass $D = T^{-1} A T$ Diagonalmatrix ist

Vorgehensweise:

- (i) char. Pol. $\chi_A \in \mathbb{R}[x]$ berechnen
- (ii) Eigenwerte bestimmen (= Nullstellen von χ_A)
- (iii) Basis für jeden Eigenraum $\text{Eig}(A, \lambda)$ berechnen
- (iv) ON-Basis für jeden Eigenraum berechnen
(mit Gram-Schmidt-Verfahren)
- (v) ON-Basis als Spalten in T eintragen

$$\begin{aligned}
 \underline{\text{zu li)}} \quad \chi_A &= \det(xE_4 - A) = \det\left(\frac{1}{4}(4xE_4 - 4A)\right) \\
 &= \left(\frac{1}{4}\right)^4 \det(4xE_4 - 4A) = \left(\frac{1}{4}\right)^4 \det \begin{pmatrix} 4x-9 & 0 & -\sqrt{3} & 6 \\ 0 & 4x+4 & 0 & 0 \\ -\sqrt{3} & 0 & 4x-11 & -2\sqrt{3} \\ 6 & 0 & -2\sqrt{3} & 4x \end{pmatrix} \\
 &= \left(\frac{1}{4}\right)^4 (4x+4) \det \begin{pmatrix} 4x-9 & -\sqrt{3} & 6 \\ -\sqrt{3} & 4x-11 & -2\sqrt{3} \\ 6 & -2\sqrt{3} & 4x \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \left(\frac{1}{4}\right)^4 (4x+4) (64x^3 - 320x^2 + 192x + 576) = \\
 (*) \quad (x+1)(x^3 - 5x^2 + 3x + 9) &= x^4 - 4x^3 - 2x^2 + 12x + 9
 \end{aligned}$$

zu lii) (*) zeigt $\Rightarrow -1$ ist Nullstelle von χ_A

Probeweises Einsetzen liefert 3 als weitere Nullstelle.

Einsetzen von -1 und 3 in $\chi_A'(x) = 4x^3 - 12x^2 - 4x + 12$

zeigt, dass 3 und -1 mehrfache Nullstellen sind

$\Rightarrow \chi_A = (x+1)^2(x-3)^2$, einzige Eigenwerte sind -1 und 3

zu iii) Berechnung von $\text{Eig}(A, -1)$

$$\text{Eig}(A, -1) = \ker(A + E_4) = \ker(4A + 4E_4) = \ker \begin{pmatrix} 13 & 0 & \sqrt{3} & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \sqrt{3} & 0 & 15 & 2\sqrt{3} \\ -6 & 0 & 2\sqrt{3} & 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 13 & 0 & \sqrt{3} & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \sqrt{3} & 0 & 15 & 2\sqrt{3} \\ -6 & 0 & 2\sqrt{3} & 4 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2\sqrt{3}} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \text{Eig}(A, -1) = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 = \frac{1}{2}x_4, x_3 = -\frac{1}{2\sqrt{3}}x_4, x_2, x_4 \in \mathbb{R} \right\}$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} \frac{1}{2}x_4 \\ x_2 \\ -\frac{1}{2\sqrt{3}}x_4 \\ x_4 \end{pmatrix} \mid x_2, x_4 \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ x_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_4 \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ -\frac{1}{2\sqrt{3}} \\ 1 \end{pmatrix} \mid x_2, x_4 \in \mathbb{R} \right\}$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ -\frac{1}{2\sqrt{3}} \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \text{ ist Basis von } \text{Eig}(A, -1)$$

$$\text{analoge Rechnung ergibt: } \left\{ \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \text{ Basis von } \text{Eig}(A, 3)$$

zu (iv) Bestimmung einer ON-Basis von $\text{Eig}(A, -1)$

$$u_1 = e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ ist bereits normiert, } \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ -\frac{1}{2\sqrt{3}} \\ 1 \end{pmatrix} \text{ orthogonal zu } u_1$$

$$\text{Normierung: } \left\| \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ -\frac{1}{2\sqrt{3}} \\ 1 \end{pmatrix} \right\|^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 0^2 + \left(-\frac{1}{2\sqrt{3}}\right)^2 + 1^2$$

$$= \frac{1}{4} + 0 + \frac{1}{12} + 1 = \frac{4}{3} \Rightarrow \left\| \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ -\frac{1}{2\sqrt{3}} \\ 1 \end{pmatrix} \right\| = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

$$\Rightarrow u_2 = \frac{\sqrt{3}}{2} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ -\frac{1}{2\sqrt{3}} \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{4} \\ 0 \\ -\frac{1}{4} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} \text{ ist normiert, } (u_1, u_2) \text{ ist ON-Basis}$$

Bestimmung einer ON-Basis von $\text{Eig}(A, 3)$.

$$\|(-\frac{1}{\sqrt{3}}, 0, 1, 0)\|^2 = \frac{1}{3} + 0 + 1 + 0 = \frac{4}{3} \Rightarrow$$

$$\|(-\frac{1}{\sqrt{3}}, 0, 1, 0)\| = \frac{2}{\sqrt{3}} \Rightarrow u_3 = (\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}\sqrt{3}, 0) \text{ ist normiert}$$

Orthogonalproj. des zweiten Basisvektors auf $\text{lin}(u_3)$.

$$\left\langle \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, u_3 \right\rangle u_3 = \left\langle \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ \frac{1}{2}\sqrt{3} \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle u_3 = -u_3$$

$$\text{Differenz: } \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - (-u_3) = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ \frac{1}{2}\sqrt{3} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3/2 \\ 0 \\ \frac{1}{2}\sqrt{3} \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{Normierung: } \|(-\frac{3}{2}, 0, \frac{1}{2}\sqrt{3}, 1)\|^2 = 9/4 + 3/4 + 1 = 4$$

$$\Rightarrow \|(-\frac{3}{2}, 0, \frac{1}{2}\sqrt{3}, 1)\| = 2 \Rightarrow u_4 = (-\frac{3}{4}, 0, \frac{1}{4}\sqrt{3}, \frac{1}{2}) \text{ ist normiert}$$

$\Rightarrow (u_3, u_4)$ ist ON-Basis von $\text{Eig}(A, 3)$

za (iv) Trage u_1, u_2, u_3, u_4 als Spalten in T ein.

$$\Rightarrow T = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{4}\sqrt{3} & \frac{1}{2} & -\frac{3}{4} \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{4} & \frac{1}{2}\sqrt{3} & \frac{1}{4}\sqrt{3} \\ 0 & \frac{1}{2}\sqrt{3} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \text{ ist die gesuchte orthogonale Matrix}$$

Aufgabe 2 (V. 6) ^{endl.-dim.} euklidischer Vektorraum
(V Vektorraum, β pos. def. symm. Bilinearform)

$\phi: V \rightarrow V$ selbstadj. Endomorphismus $\Leftrightarrow$

$$\phi \in \text{End}_{\mathbb{R}}(V), \quad \beta(\phi(v), w) = \beta(v, \phi(w)) \quad \forall v, w \in V$$

zu ii) $U \subseteq V$ Untervektorraum, π_U Orth.-proj. auf U

z.zg.: π_U selbstadjungiert

Sei $(u_1, \dots, u_m)$ eine ON-Basis von U , $m = \dim U$

$U \perp U^\perp$ gilt $\pi_U(v) = \sum_{k=1}^m \beta(v, u_k) u_k \quad \forall v \in V.$

Seien $v, w \in V$. z.zg.: $\beta(\pi_U(v), w) = \beta(v, \pi_U(w))$

π_U Orth.-proj. auf U
z.B. π_U selbstadjungiert

linke Seite: $b(\pi_U(v), w) = b\left(\sum_{k=1}^m b(v, u_k) u_k, w\right)$
 $= \sum_{k=1}^m b(v, u_k) b(u_k, w)$

rechte Seite: $b(v, \pi_U(w)) = b\left(v, \sum_{k=1}^m b(w, u_k) u_k\right)$
 $= \sum_{k=1}^m b(w, u_k) b(v, u_k) = \sum_{k=1}^m b(v, u_k) b(u_k, w)$

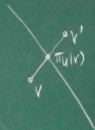
$\Rightarrow$ Linke und rechte Seite stimmen überein.

$$\begin{aligned} b\left(\sum_{k=1}^m b(v, u_k) u_k, w\right) &= b(b(v, u_1) u_1 + \dots + b(v, u_m) u_m, w) \\ &= b(b(v, u_1) u_1, w) + \dots + b(b(v, u_m) u_m, w) \\ &= b(v, u_1) b(u_1, w) + \dots + b(v, u_m) b(u_m, w) \end{aligned}$$

zu (b) Wäre π_u orthogonal, dann wäre die Darstellungsmatrix bzgl. einer bel. ON-Basis orthogonal, insb. invertierbar, und π_u somit bijektiv. Es müsste also $\pi_u(V) = V$ gelten. Es gilt aber $\pi_u(V) = U \neq V$.

zu (c) Spiegelung am Untervektorraum U

$$s_u : V \rightarrow V, v \mapsto 2\pi_u(v) - v$$



$$\text{Sei } v \in V \quad s_u^2(v) = s_u(2\pi_u(v) - v) =$$

$$2\pi_u(2\pi_u(v) - v) - (2\pi_u(v) - v) =$$

$$4\pi_u^2(v) - 2\pi_u(v) - 2\pi_u(v) + v =$$

$$4\pi_u(v) - 2\pi_u(v) - 2\pi_u(v) + v = v.$$

$$\begin{aligned} \pi_u u &= \text{id}_u \\ \Rightarrow \pi_u^2 &= \pi_u \\ \Rightarrow s_u^2 &= \text{id}_V \end{aligned}$$

zu (d) z.zg. S_u selbstadjungiert und orthogonal
 selbstadjungiert. Seien $v, w \in V$, z.zg. $b(S_u(v), w) = b(v, S_u(w))$

linke Seite: $b(S_u(v), w) = b(2\pi_u(v) - v, w) =$
 $b(2\pi_u(v), w) - b(v, w) = 2b(\pi_u(v), w) - b(v, w)$

rechte Seite: $b(v, S_u(w)) = b(v, 2\pi_u(w) - w) =$ (a)
 $b(v, 2\pi_u(w)) - b(v, w) = 2b(v, \pi_u(w)) - b(v, w) \stackrel{\pi_u \text{ selbstadj.}}{=} 2b(\pi_u(v), w) - b(v, w)$
 $\rightarrow$ linke Seite = rechte Seite

orthogonal. z.zg. $b(S_u(v), S_u(w)) = b(v, w) \quad \forall v, w \in V$
 Seien $v, w \in V$. $b(S_u(v), S_u(w)) = b(2\pi_u(v) - v, 2\pi_u(w) - w)$

$$= 4b(\pi_u(v), \pi_u(w)) - 2b(v, \pi_u(w)) - 2b(\pi_u(v), w) + b(v, w)$$

$$= b(2\pi_u(v), 2\pi_u(w)) - 2b(v, 2\pi_u(w))$$

$$- b(2\pi_u(v), w) + b(v, w)$$

$$= 4b(\pi_u(v), \pi_u(w)) - 2b(v, \pi_u(w))$$

$$- 2b(\pi_u(v), w) + b(v, w)$$

$$= 4b(\pi_u(v), \pi_u(w)) - 2b(\pi_u(v), w)$$

$$- 2b(\pi_u(v), w) + b(v, w)$$

$$= 4b(\pi_u(v), \pi_u(w)) - 4b(\pi_u(v), w) + b(v, w)$$

$$= 4b(\pi_u^2(v), w) - 4b(\pi_u(v), w) + b(v, w)$$

$$= 4b(\pi_u(v), w) - 4b(\pi_u(v), w) + b(v, w) = b(v, w)$$