

Analysis mehrerer Variablen (LA Gym)

— Lösung Blatt 4 —

(Globalübungsblatt)

Aufgabe 1

Die gesamte Rechnung besteht aus den folgenden fünf Einzelschritten.

- (i) Berechnung des charakteristischen Polynoms χ_A
- (ii) Bestimmung der Eigenwerte
- (iii) Berechnung einer Basis für jeden Eigenraum
- (iv) Berechnung einer ON-Basis für jeden Eigenraum
- (v) Eintragen der ON-Basen als Spalten in die gesuchte Transformationsmatrix T

zu (i)

$$\begin{aligned}\chi_A &= \det(xE_4 - A) = \det\left(\frac{1}{4}(4xE_4 - 4A)\right) = \left(\frac{1}{4}\right)^4 \det(4xE_4 - 4A) = \\ & \left(\frac{1}{4}\right)^4 \det \begin{pmatrix} 4x-9 & 0 & -\sqrt{3} & 6 \\ 0 & 4x+4 & 0 & 0 \\ -\sqrt{3} & 0 & 4x-11 & -2\sqrt{3} \\ 6 & 0 & -2\sqrt{3} & 4x \end{pmatrix} = \left(\frac{1}{4}\right)^4 (4x+4) \det \begin{pmatrix} 4x-9 & -\sqrt{3} & 6 \\ -\sqrt{3} & 4x-11 & -2\sqrt{3} \\ 6 & -2\sqrt{3} & 4x \end{pmatrix} \\ &= \left(\frac{1}{4}\right)^4 (4x+4)(64x^3 - 320x^2 + 192x + 576) = (x+1)(x^3 - 5x^2 + 3x + 9) \\ &= x^4 - 4x^3 - 2x^2 + 12x + 9.\end{aligned}$$

Dabei wurde im fünften Schritt der Laplacesche Entwicklungssatz auf die zweite Spalte und im sechsten Schritt die Sarrus-Regel angewendet.

zu (ii) Durch probeweises Einsetzen findet man die Nullstellen -1 und 3 von χ_A , und durch Einsetzen in die Ableitung $4x^3 - 12x^2 - 4x + 12$ sieht man, dass es sich um mehrfache Nullstellen handelt. Damit hat das charakteristische Polynom χ_A die Zerlegung $\chi_A = (x+1)^2(x-3)^2$ als Produkt von Linearfaktoren, und die beiden Eigenwerte von A sind -1 und 3 .

zu (iii) Wir bestimmen eine Basis von $\text{Eig}(A, -1) = \ker(A + E_4) = \ker(4A + 4E_4)$. (Die Matrix $A + E_4$ wird vor der Rechnung mit 4 multipliziert, um das Rechnen mit komplizierten Brüchen zu vermeiden.) Der Gauß-Algorithmus liefert

$$\begin{pmatrix} 13 & 0 & \sqrt{3} & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \sqrt{3} & 0 & 15 & 2\sqrt{3} \\ -6 & 0 & 2\sqrt{3} & 4 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \sqrt{3} & 0 & 15 & 2\sqrt{3} \\ -6 & 0 & 2\sqrt{3} & 4 \\ 13 & 0 & \sqrt{3} & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5\sqrt{3} & 2 \\ -6 & 0 & 2\sqrt{3} & 4 \\ 13 & 0 & \sqrt{3} & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5\sqrt{3} & 2 \\ 0 & 0 & 32\sqrt{3} & 16 \\ 0 & 0 & -64\sqrt{3} & -32 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5\sqrt{3} & 2 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2\sqrt{3}} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2\sqrt{3}} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

An der letzten Matrix kann die Basis $\{ {}^t(0, 1, 0, 0), {}^t(\frac{1}{2}, 0, -\frac{1}{2}\sqrt{3}, 1) \}$ für den Untervektorraum $\text{Eig}(A, -1)$ abgelesen werden.

Nun bestimmen wir eine Basis von $\text{Eig}(A, 3) = \ker(A - 3E_4) = \ker(4A - 12E_4)$.

$$\begin{pmatrix} -3 & 0 & \sqrt{3} & -6 \\ 0 & -16 & 0 & 0 \\ \sqrt{3} & 0 & -1 & 2\sqrt{3} \\ -6 & 0 & 2\sqrt{3} & -12 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{\sqrt{3}} & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -\frac{1}{\sqrt{3}} & 2 \\ -6 & 0 & 2\sqrt{3} & -12 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{\sqrt{3}} & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Also ist $\{ {}^t(-\frac{1}{\sqrt{3}}, 0, 1, 0), {}^t(-2, 0, 0, 1) \}$ eine Basis von $\text{Eig}(A, 3)$.

zu (iv) In der Basis von $\text{Eig}(A, -1)$ sind die Vektoren bereits orthogonal zueinander, und $u_1 = {}^t(0, 1, 0, 0)$ ist auch bereits normiert. Für den zweiten Vektor gilt $\|(\frac{1}{2}, 0, -\frac{1}{2\sqrt{3}}, 1)\|^2 = (\frac{1}{2})^2 + 0^2 + (-\frac{1}{2\sqrt{3}})^2 + 1^2 = \frac{1}{4} + 0 + \frac{1}{12} + 1 = \frac{4}{3}$, die Länge dieses Vektors ist also $\frac{2}{\sqrt{3}}$. Damit ist $u_2 = \frac{1}{2}\sqrt{3} {}^t(\frac{1}{2}, 0, -\frac{1}{2\sqrt{3}}, 1) = {}^t(\frac{1}{4}\sqrt{3}, 0, -\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\sqrt{3})$ normiert, und (u_1, u_2) ist eine ON-Basis von $\text{Eig}(A, -1)$.

In der Basis von $\text{Eig}(A, 3)$ ist $\|(\frac{1}{\sqrt{3}}, 0, 1, 0)\|^2 = \frac{4}{3}$, also ist $u_3 = \frac{1}{2}\sqrt{3} {}^t(\frac{1}{\sqrt{3}}, 0, 1, 0) = {}^t(\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}\sqrt{3}, 0)$ ein normierter Vektor. Den zweiten Vektor der ON-Basis erhalten wir mit dem Gram-Schmidt-Verfahren: Es ist $\langle u_3, {}^t(-2, 0, 0, 1) \rangle = -1$, also steht der Vektor $w = {}^t(-2, 0, 0, 1) + {}^t(\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}\sqrt{3}, 0) = {}^t(-\frac{3}{2}, 0, \frac{1}{2}\sqrt{3}, 1)$ orthogonal auf u_3 . Wegen $\|w\|^2 = \|{}^t(-\frac{3}{2}, 0, \frac{1}{2}\sqrt{3}, 1)\|^2 = \frac{9}{4} + \frac{3}{4} + 1 = 4$ hat w die Länge 2, somit ist $u_4 = \frac{1}{2}w = {}^t(-\frac{3}{4}, 0, \frac{1}{4}\sqrt{3}, \frac{1}{2})$ normiert. Insgesamt ist (u_3, u_4) eine ON-Basis von $\text{Eig}(A, 3)$.

zu (v) Wir erhalten die gesuchte Matrix T , indem wir die Vektoren u_1, u_2, u_3, u_4 als Spalten eintragen.

$$T = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{4}\sqrt{3} & \frac{1}{2} & -\frac{3}{4} \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{4} & \frac{1}{2}\sqrt{3} & \frac{1}{4}\sqrt{3} \\ 0 & \frac{1}{2}\sqrt{3} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Man überprüft, dass ${}^tTT = E_4$ gilt, also ist die Matrix T orthogonal. Außerdem ist

$$D = {}^tTAT = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{eine Diagonalmatrix.}$$

Aufgabe 2

zu (a) Sei $r = \dim(U)$ und $(u_1, \dots, u_r)$ eine ON-Basis von U . Laut Vorlesung ist die Orthogonalprojektion auf U gegeben durch $\pi_U(v) = \sum_{k=1}^r b(u_k, v)u_k$. Seien $v, w \in V$ vorgegeben. Zu zeigen ist $b(\pi_U(v), w) = b(v, \pi_U(w))$. Nun gilt einerseits

$$b(\pi_U(v), w) = b\left(\sum_{k=1}^r b(u_k, v)u_k, w\right) = \sum_{k=1}^r b(b(u_k, v)u_k, w) = \sum_{k=1}^r b(u_k, v)b(u_k, w)$$

andererseits aber auch

$$\begin{aligned} b(v, \pi_U(w)) &= b\left(v, \sum_{k=1}^r b(u_k, w)u_k\right) = \sum_{k=1}^r b(v, b(u_k, w)u_k) = \sum_{k=1}^r b(u_k, w)b(v, u_k) \\ &= \sum_{k=1}^r b(u_k, v)b(u_k, w) \end{aligned}$$

also tatsächlich $b(\pi_U(v), w) = b(v, \pi_U(w))$.

zu (b) Zunächst bemerken wir, dass $\pi_U \circ \pi_U = \pi_U$ gilt. Für jedes $v \in V$ liegt nämlich $\pi_U(v)$ in U , und laut Vorlesung gilt $\pi_U|_U = \text{id}_U$. Daraus folgt $(\pi_U \circ \pi_U)(v) = \pi_U(\pi_U(v)) = \text{id}_U(\pi_U(v)) = \pi_U(v)$.

Wäre nun π_U orthogonal, dann müsste insbesondere $b(\pi_U(w), \pi_U(w)) = b(w, w)$ für alle $w \in V$ gelten. Um zu zeigen, dass dies nicht für jeden Vektor erfüllt ist, wählen wir zunächst einen beliebigen Vektor $v \in V \setminus U$, was wegen $U \subsetneq V$ möglich ist. Setzen wir $w = v - \pi_U(v)$, dann gilt zunächst $w \neq 0_V$ wegen $\pi_U(v) \in U$ und $v \notin U$. Weil b positiv definit ist, folgt $b(w, w) > 0$. Andererseits gilt $\pi_U(w) = \pi_U(v) - (\pi_U \circ \pi_U)(v) = \pi_U(v) - \pi_U(v) = 0_V$, also $b(\pi_U(w), \pi_U(w)) = b(0_V, 0_V) = 0$ und somit tatsächlich $b(\pi_U(w), \pi_U(w)) \neq b(w, w)$.

zu (c) Für jedes $v \in V$ gilt

$$\begin{aligned} s_U^2(v) &= s_U(s_U(v)) = s_U(2\pi_U(v) - v) = 2\pi_U(2\pi_U(v) - v) - (2\pi_U(v) - v) \\ &= 4(\pi_U \circ \pi_U)(v) - 2\pi_U(v) - 2\pi_U(v) + v = 4\pi_U(v) - 2\pi_U(v) - 2\pi_U(v) + v = v. \end{aligned}$$

Damit ist $s_U^2 = \text{id}_V$ nachgewiesen.

zu (d) Zunächst zeigen wir, dass s_U selbstadjungiert ist. Seien $v, w \in V$ vorgegeben. Dann gilt einerseits $b(s_U(v), w) = b(2\pi_U(v) - v, w) = 2b(\pi_U(v), w) - b(v, w)$, andererseits aber auch

$$b(v, s_U(w)) = b(v, 2\pi_U(w) - w) = 2b(v, \pi_U(w)) - b(v, w) = 2b(\pi_U(v), w) - b(v, w)$$

wobei im letzten Schritt verwendet wurde, dass π_U nach Teil (a) selbstadjungiert ist. Insgesamt erhalten wir $b(s_U(v), w) = b(v, s_U(w))$ wie gewünscht.

Nun zeigen wir noch, dass s_U orthogonal ist. Für beliebige $v, w \in V$ gilt

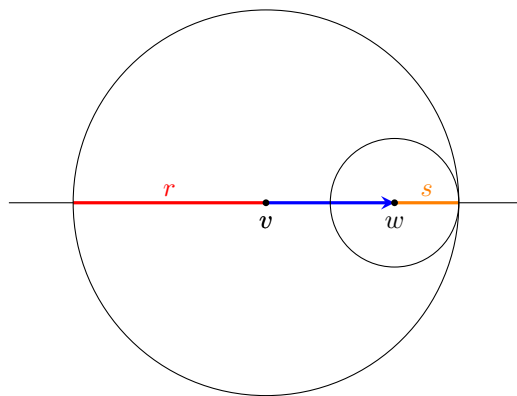
$$\begin{aligned}
 b(s_U(v), s_U(w)) &= b(2\pi_U(v) - v, 2\pi_U(w) - w) = b(2\pi_U(v), 2\pi_U(w) - w) - b(v, 2\pi_U(w) - w) \\
 &= 4b(\pi_U(v), \pi_U(w)) - 2b(\pi_U(v), w) - 2b(v, \pi_U(w)) + b(v, w) = \\
 &= 4b(v, (\pi_U \circ \pi_U)(w)) - 2b(v, \pi_U(w)) - 2b(v, \pi_U(w)) + b(v, w) = \\
 &= 4b(v, \pi_U(w)) - 2b(v, \pi_U(w)) - 2b(v, \pi_U(w)) + b(v, w) = b(v, w)
 \end{aligned}$$

also ist s_U tatsächlich orthogonal.

Aufgabe 3

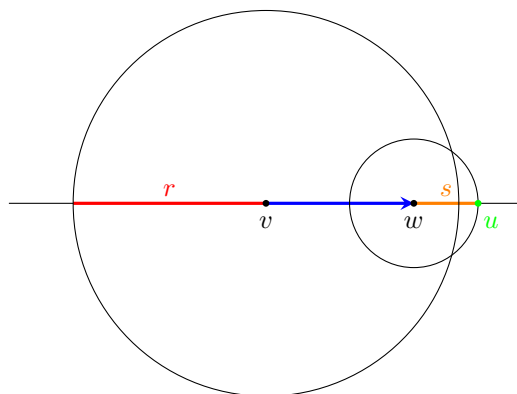
Der Einfachheit halber schreiben wir $\bar{B}_r(v)$ statt $\bar{B}_{r, \|\cdot\|}(v)$, lassen also die Norm $\|\cdot\|$ im Index weg.

„ $\Leftarrow$ “ Wir setzen die Ungleichung $s + \|w - v\| \leq r$ voraus, zu zeigen ist $\bar{B}_s(w) \subseteq \bar{B}_r(v)$. Sei $u \in \bar{B}_s(w)$ vorgegeben. Dann gilt $\|w - u\| \leq s$ nach Definition des abgeschlossenen Balls um w vom Radius s . Mit der Dreiecksungleichung erhalten wir $\|v - u\| = \|(v - w) + (w - u)\| \leq \|v - w\| + \|w - u\| \leq \|w - v\| + s \leq r$. Daraus folgt $u \in \bar{B}_r(v)$.



„ $\Rightarrow$ “ Diese Richtung beweisen wir durch Kontraposition. Wir setzen $s + \|w - v\| > r$ voraus und zeigen, dass ein Punkt u mit $u \in \bar{B}_s(w)$ und $u \notin \bar{B}_r(v)$ existiert. Dazu definieren wir

$$u = w + \frac{s}{\|w - v\|}(w - v).$$



Dann gilt einerseits

$$\|u - w\| = \left\| \left(w + \frac{s}{\|w - v\|} (w - v) \right) - w \right\| = \left\| \frac{s}{\|w - v\|} (w - v) \right\| = \frac{s}{\|v - w\|} \|w - v\| = s$$

und somit $u \in \bar{B}_s(w)$. Andererseits gilt aber

$$\begin{aligned} u - v &= \left(w + \frac{s}{\|w - v\|} (w - v) \right) - v = \left(-\frac{s}{\|w - v\|} - 1 \right) v + \left(1 + \frac{s}{\|w - v\|} \right) w = \\ &\quad \left(1 + \frac{s}{\|w - v\|} \right) (w - v) \end{aligned}$$

und somit

$$\|u - v\| = \left(1 + \frac{s}{\|w - v\|} \right) \|w - v\| = \|w - v\| + s > r$$

und somit $u \notin B_r(v)$.