

Analysis mehrerer Variablen

— Lösung Blatt 3 —

(Tutoriumsblatt)

Aufgabe 0 (Vorbereitung auf das Tutorium)

zu (a) Die Multiplikation ist eine Bilinearform auf $\mathbb{R}^1$, denn für alle $x, y, x', y' \in \mathbb{R}^1$ und alle $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt $(x + x')y = xy + x'y$, $(\lambda x)y = \lambda(xy)$, $x(y + y') = xy + xy'$ und $x(\lambda y) = \lambda(xy)$. Die Addition ist keine Bilinearform, denn setzen wir $b(x, y) = x + y$, dann gilt beispielsweise $b(1 + 1, 1) \neq b(1, 1) + b(1, 1)$, denn es ist $(1 + 1) + 1 = 3$, aber $(1 + 1) + (1 + 1) = 4$. Auch die Subtraktion ist keine Bilinearform. Definieren wir nämlich $b(x, y) = x - y$, dann gilt $b(1 + 1, 1) \neq b(1, 1) + b(1, 1)$, denn es ist $(1 + 1) - 1 = 1$, aber $(1 - 1) + (1 - 1) = 0$. (Natürlich sind $\mathbb{R}^1$ und $\mathbb{R}$ identisch. Wir verwenden die Bezeichnung $\mathbb{R}^1$ nur, um zu betonen, dass wir die Elemente dieser Menge als Vektoren, genauer als Elemente des $\mathbb{R}$ -Vektorraums $\mathbb{R}^1$, betrachten.)

zu (b) Ist $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$ die vorgegebene geordnete Basis von V , dann ist $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(b)$ die Matrix $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{n, \mathbb{R}}$ mit den Einträgen $a_{ij} = b(v_i, v_j)$ für $1 \leq i, j \leq n$. Sind $v, w \in V$ und $\Phi_{\mathcal{B}}(v)$, $\Phi_{\mathcal{B}}(w)$ die zugehörigen Basisvektoren, dann kann $b(v, w)$ mit Hilfe der Darstellungsmatrix durch die Gleichung $b(v, w) = {}^t\Phi_{\mathcal{B}}(v)\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(b)\Phi_{\mathcal{B}}(w)$ bestimmt werden.

zu (c) Sind $x, y \in \mathbb{R}^1$ vorgegeben, dann sind $\frac{1}{2}x$ und $\frac{1}{2}y$ die Koordinatenvektoren von x, y bezüglich der Basis $\mathcal{B} = (2)$. Mit der Gleichung aus Teil (b) erhalten wir $b(v, w) = \frac{1}{2}x \cdot 5 \cdot \frac{1}{2}y = \frac{5}{4}xy$.

zu (d) Im Allgemeinen ist die Darstellungsmatrix einer Bilinearform nicht invertierbar. Sei $n \in \mathbb{N}$, V ein n -dimensionaler $\mathbb{R}$ -Vektorraum und $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$ eine geordnete Basis. Dann ist durch $b(v, w) = 0$ für alle $v, w \in V$ eine Bilinearform auf V definiert, wie man leicht überprüft. Insbesondere gilt $b(v_i, v_j) = 0$ für alle i, j mit $1 \leq i, j \leq n$. Die Darstellungsmatrix $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(b)$ ist also die Nullmatrix, und diese ist nicht invertierbar.

Ist b allerdings positiv definit, dann muss $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(b)$ invertierbar sein. Wäre dies nicht der Fall, dann wäre der Rang von $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(b)$ kleiner als n , und mit dem Dimensionssatz für lineare Abbildungen würden wir $\dim \ker \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(b) > 0$ erhalten. Es gäbe also einen Vektor $u \in \mathbb{R}^n$ mit $u \neq 0_{\mathbb{R}^n}$ und $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(b)u = 0_{\mathbb{R}^n}$. Für den eindeutig bestimmten Vektor $v \in V$ mit $\Phi_{\mathcal{B}}(v) = u$ würde dann $v \neq 0_V$ gelten, und es wäre

$$b(v, v) = ({}^tu)\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(b)u = ({}^tu)0_{\mathbb{R}^n} = 0.$$

Aber dies steht im Widerspruch dazu, dass b positiv definit ist und demnach $b(v, v) > 0$ gelten muss.

Aufgabe 1

zu (a) Diese Abbildung ist keine Bilinearform, da zum Beispiel $b(x, y + y') = b(x, y) + b(x, y')$ nicht für alle $x, y, y' \in \mathbb{R}$ erfüllt ist. Setzen wir zum Beispiel $x = 1$ und $y = y' = 2$, dann gilt einerseits $b(x, y + y') = 1 \cdot (2 + 2)^2 = 1 \cdot 4^2 = 16$, andererseits aber $b(x, y) + b(x, y') = 1 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^2 = 4 + 4 = 8$. Also ist b erst recht kein Skalarprodukt.

zu (b) Diese Abbildung ist eine Bilinearform, denn für alle $z, z', w, w' \in \mathbb{C}$ und $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt

$$b(z + z', w) = \operatorname{Re}((z + z')w) = \operatorname{Re}(zw + z'w) = \operatorname{Re}(zw) + \operatorname{Re}(z'w) = b(z, w) + b(z', w)$$

$$b(\lambda z, w) = \operatorname{Re}(\lambda zw) = \lambda \operatorname{Re}(zw) = \lambda b(z, w)$$

$$b(z, w + w') = \operatorname{Re}(z(w + w')) = \operatorname{Re}(zw + zw') = \operatorname{Re}(zw) + \operatorname{Re}(zw') = b(z, w) + b(z, w')$$

$$b(z, \lambda w) = \operatorname{Re}(z(\lambda w)) = \lambda \operatorname{Re}(zw) = \lambda b(z, w).$$

Sie ist aber nicht positiv definit, denn für $z = i$ gilt beispielsweise $b(z, z) = \operatorname{Re}(i^2) = \operatorname{Re}(-1) = -1$. Also ist b kein Skalarprodukt.

zu (c) Diese Abbildung ist eine Bilinearform, denn für alle $f_1, f_2, g_1, g_2 \in V$ und $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt

$$b(f_1 + f_2, g_1) = (f_1 + f_2)(0)g_1(1) = (f_1(0) + f_2(0))g_1(1) = f_1(0)g_1(1) + f_2(0)g_1(1) = b(f_1, g_1) + b(f_2, g_1)$$

$$b(\lambda f_1, g_1) = (\lambda f_1)(0)g_1(1) = \lambda f_1(0)g_1(1) = \lambda b(f_1, g_1)$$

$$b(f_1, g_1 + g_2) = f_1(0)(g_1 + g_2)(1) = f_1(0)(g_1(1) + g_2(1)) = f_1(0)g_1(1) + f_1(0)g_2(1) = b(f_1, g_1) + b(f_1, g_2)$$

$$b(f_1, \lambda g_1) = f_1(0)(\lambda g_1)(1) = f_1(0)\lambda g_1(1) = \lambda f_1(0)g_1(1) = \lambda b(f_1, g_1).$$

Die Abbildung ist aber nicht positiv definit. Für das Element $f \in V$ gegeben durch $f(x) = x$ für $x \in [0, 1]$ gilt zum Beispiel $b(f, f) = f(0)f(1) = 0 \cdot 1 = 0$. Also ist f kein Skalarprodukt.

Aufgabe 2

zu (a) Zunächst ist $\tilde{b}$ auf jeden Fall symmetrisch, denn für alle $v, w \in V$ gilt $\tilde{b}(w, v) = b(Aw, Av) = b(Av, Aw) = \tilde{b}(v, w)$, weil b symmetrisch ist. Aus der Linearen Algebra ist bekannt, dass A genau dann invertierbar ist, wenn $\ker(A) = \{0_V\}$ gilt. Zum Beweis von „ $\Leftarrow$ “ sei A invertierbar und $v \in V \setminus \{0_V\}$. Dann ist auch $Av \neq 0_V$ und somit $\tilde{b}(v, v) = b(Av, Av) > 0$, weil b positiv definit ist. Insgesamt ist $\tilde{b}$ also ein Skalarprodukt.

Für den Beweis von „ $\Rightarrow$ “ setzen wir voraus, dass $\tilde{b}$ ein Skalarprodukt ist. Nehmen wir an, A ist nicht invertierbar. Dann ist $\ker(A) \neq \{0_V\}$, folglich gibt es ein $v \in V \setminus \{0_V\}$ mit $Av = 0_V$. Es folgt $\tilde{b}(v, v) = b(Av, Av) = b(0_V, 0_V) = 0$. Aber dies steht im Widerspruch dazu, dass $\tilde{b}$ positiv definit ist.

zu (b) Die Bilder der Einheitsvektoren unter der Abbildung $v \mapsto Av$ sind genau die Spalten der Matrix A . Bezeichnen wir die drei Spaltenvektoren von A mit v_1, v_2, v_3 , dann gilt für alle $i, j \in \{1, 2, 3\}$ jeweils $\tilde{b}(e_i, e_j) = \langle Ae_i, Ae_j \rangle = \langle v_i, v_j \rangle$. Damit erhalten wir die Werte

$$\tilde{b}(e_1, e_1) = \langle v_1, v_1 \rangle = 1^2 + 4^2 + 7^2 = 1 + 16 + 49 = 66$$

$$\tilde{b}(e_1, e_2) = \langle v_1, v_2 \rangle = 1 \cdot 2 + 4 \cdot 5 + 7 \cdot 8 = 2 + 20 + 56 = 78$$

$$\tilde{b}(e_1, e_3) = \langle v_1, v_3 \rangle = 1 \cdot 3 + 4 \cdot 6 + 7 \cdot 9 = 3 + 24 + 63 = 90$$

$$\tilde{b}(e_2, e_2) = \langle v_2, v_2 \rangle = 2^2 + 5^2 + 8^2 = 4 + 25 + 64 = 93$$

$$\tilde{b}(e_2, e_3) = \langle v_2, v_3 \rangle = 2 \cdot 3 + 5 \cdot 6 + 8 \cdot 9 = 6 + 30 + 72 = 108$$

$$\tilde{b}(e_3, e_3) = \langle v_3, v_3 \rangle = 3^2 + 6^2 + 9^2 = 9 + 36 + 81 = 126$$

Wir haben bereits in Teil (a) festgestellt, dass $\tilde{b}$ symmetrisch ist. Deshalb brauchen wir keine weiteren Einträge der Darstellungsmatrix mehr zu berechnen. Die gesuchte Matrix ist gegeben durch

$$\begin{pmatrix} 66 & 78 & 90 \\ 78 & 93 & 108 \\ 90 & 108 & 126 \end{pmatrix}.$$

zu (c) Seien $v_1, \dots, v_n$ die Spaltenvektoren von A . Aus der Vorlesung ist bekannt, dass für alle $v, w \in \mathbb{R}^n$ der Wert der Bilinearform $b(v, w)$ durch ${}^t v \mathcal{M}_{\mathcal{E}}(b) w$ gegeben ist. (Falls $\mathcal{B}$ eine beliebige Basis von V bezeichnet, dann müssen v und w durch die Koordinatenvektoren $\Phi_{\mathcal{B}}(v)$ und $\Phi_{\mathcal{B}}(w)$ ersetzt werden.) Bezeichnen wir mit $e_1, \dots, e_n$ die Einheitsvektoren in $\mathbb{R}^n$, dann gilt also jeweils

$$\tilde{b}(e_i, e_j) = b(Ae_i, Ae_j) = {}^t(Ae_i) \mathcal{M}_{\mathcal{E}}(b)(Ae_j) = {}^t e_i {}^t A \mathcal{M}_{\mathcal{E}}(b) Ae_j.$$

Dies zeigt, dass die Darstellungsmatrix von $\tilde{b}$ bezüglich $\mathcal{E}$ durch $\mathcal{M}_{\mathcal{E}}(b') = {}^t A \mathcal{M}_{\mathcal{E}}(b) A$ gegeben ist. In Teil (b) ist $\mathcal{M}_{\mathcal{E}}(\langle \cdot, \cdot \rangle) = E_3$ die Einheitsmatrix, somit ist hier $\mathcal{M}_{\mathcal{E}}(b') = {}^t A A$.

Aufgabe 3

zu (a) Offenbar ist A symmetrisch. Außerdem gilt

$$\det(A_1) = \det(1) = 1 > 0$$

$$\det(A_2) = \det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = 1 \cdot 2 - 1 \cdot 1 = 1 > 0$$

$$\begin{aligned} \det(A_3) = \det(A) &= \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = 1 \cdot 2 \cdot 3 + 1 \cdot 2 \cdot 1 + 1 \cdot 1 \cdot 2 - 1 \cdot 2 \cdot 1 - 2 \cdot 2 \cdot 1 - 3 \cdot 1 \cdot 1 \\ &= 6 + 2 + 2 - 2 - 4 - 3 = 1 > 0 \end{aligned}$$

Also ist A nach dem Hurwitz-Kriterium positiv definit.

zu (b) Wir führen die Gram-Schmidt-Orthonormalisierung durch, wobei wir die Bezeichnungen wie in der Vorlesung verwenden.

$$\underline{k=1}$$

$$b(e_2, u_1) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 1$$

$$w_2 = b(e_2, u_1)u_1 = u_1 = e_1$$

$$\tilde{u}_2 = e_2 - e_1 = {}^t \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$b(\tilde{u}_2, \tilde{u}_2) = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 1 \Rightarrow \|\tilde{u}_2\|_b = 1$$

$$u_2 = \|\tilde{u}_2\|_b^{-1} \tilde{u}_2 = \tilde{u}_2 = {}^t \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$k = 2$

$$b(e_3, u_1) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 1$$

$$b(e_3, u_2) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 1$$

$$w_3 = b(e_3, u_1)u_1 + b(e_3, u_2)u_2 = {}^t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\tilde{u}_3 = e_3 - w_3 = {}^t \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$b(\tilde{u}_3, \tilde{u}_3) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = 1 \Rightarrow \|\tilde{u}_3\|_b = 1$$

$$u_3 = \|\tilde{u}_3\|_b^{-1} \tilde{u}_3 = \tilde{u}_3 = {}^t \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Die gesuchte ON-Basis besteht also aus den Vektoren $u_1 = {}^t(1, 0, 0)$, $u_2 = {}^t(-1, 1, 0)$ und $u_3 = {}^t(0, -1, 1)$.