Globalübungsblatt 3

Aufgabe 1

V $\mathbb{R}$-Vektorraum, $b: V \times V \to \mathbb{R}$ Abbildung

b <u>Bilinearform</u> $\Leftrightarrow$ $\forall \lambda \in \mathbb{R}, v, v', w, w' \in V$

$b(v+v', w) = b(v,w) + b(v',w)$, $b(v, w+w') = b(v,w) + b(v,w')$

$b(\lambda v, w) = \lambda b(v,w) = b(v, \lambda w)$

(Folgerung: $b\left(\sum_{i=1}^{r} \lambda_i v_i, w\right) = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i b(v_i, w)$ für bel. $\lambda \in \mathbb{R}$ und $v_1, \dots, v_r, w \in V$)

b symmetrische <u>Bilinearform</u> $\Leftrightarrow$ zusätzlich $b(w,v)$ $= b(w,v)$ für alle $v, w \in V$

b <u>positiv definite</u> symm. BF $\Leftrightarrow$ zusätzlich $b(v,v) > 0$ $\forall v \in V$ mit $v \neq 0_V$

Frage: Ist b Bilinearform, symm., pos. definit?

zu (a) $V = \mathbb{R}^n$, $b(x,y) = \max\{x_i \mid 1 \leq i \leq n\} \max\{y_i \mid 1 \leq i \leq n\}$

wobei $n \geq 2$

Betrachte $x = e_1$, $y = e_2$.

$$b(x,x) = \max\{\delta_{1i} \mid 1 \leq i \leq n\} \max\{\delta_{1i} \mid 1 \leq i \leq n\}$$
$$= 1 \cdot 1 = 1$$
$$b(x,y) = 1 \cdot 1 = 1$$
$$x + y = e_1 + e_2 = (1, 1, 0, \dots, 0)$$
$$b(x, x+y) = 1 \cdot 1 = 1$$

$\Rightarrow b(x, x+y) = 1 \neq 1 + 1 = b(x,x) + b(x,y)$

$\Rightarrow$ b ist keine Bilinearform, erst recht keine symm. oder positiv definite Bilinearform

$+ g_1(b) f_1(b) = b(g_1, f_1)$ Also gilt $b(f,g) = b(g,f)\ \forall f,g \in$

zu (b) $V = \mathbb{C}$ (als $\mathbb{R}$-Vektorraum), $b(z,w) = \mathrm{Re}(\bar{z} \cdot w)$

Beh. b ist positiv definite symm. BF

Seien $z, z', w, w' \in \mathbb{C}$, $\lambda \in \mathbb{R}$

$b(z+z', w) = \mathrm{Re}(\overline{z+z'} \cdot w) = \mathrm{Re}((\bar{z} + \bar{z}') \cdot w) =$

$\mathrm{Re}(\bar{z} \cdot w + \bar{z}' \cdot w) = \mathrm{Re}(\bar{z} \cdot w) + \mathrm{Re}(\bar{z}' \cdot w) = b(z,w) + b(z',w)$

$b(z, w+w') = \mathrm{Re}(\bar{z}(w+w')) = \mathrm{Re}(\bar{z} \cdot w + \bar{z}\, w') = \mathrm{Re}(\bar{z} \cdot w) +$

$\mathrm{Re}(\bar{z} \cdot w') = b(z,w) + b(z,w')$

$b(\lambda z, w) = \mathrm{Re}(\overline{\lambda z} \cdot w) = \mathrm{Re}(\bar{\lambda} \cdot \bar{z} \cdot w) \overset{\lambda \in \mathbb{R}}{=} \mathrm{Re}(\lambda \bar{z} w) =$

$\lambda \mathrm{Re}(\bar{z} \cdot w) = \lambda b(z,w)$, $b(z, \lambda w) = \mathrm{Re}(\bar{z} \cdot \lambda \cdot w) =$

$\mathrm{Re}(\lambda \bar{z} w) = \lambda \mathrm{Re}(\bar{z} \cdot w) = \lambda b(z,w)$

Also ist b Bilinearform

$\Rightarrow b(f,f) = f(a)\cdot f(a) + f(b)\cdot f(b) = 0$ Andererseits ist $f \neq 0_V$

$b(w,z) = \mathrm{Re}(\bar{w}\cdot z) = \mathrm{Re}(\overline{\bar{w}\, z}) = \mathrm{Re}(\bar{\bar{w}}\cdot \bar{z}) =$
$\mathrm{Re}(w\cdot \bar{z}) = \mathrm{Re}(\bar{z}\cdot w) = b(z,w) \Rightarrow b$ symm. Bilinearform

Sei $z = a + ib$ mit $a, b \in \mathbb{R}$, $z \neq 0$ $(\Rightarrow (a,b) \neq (0,0))$

$b(z,z) = \mathrm{Re}(\bar{z}\, z) = \mathrm{Re}(|z|^2) = |z|^2 = a^2 + b^2 > 0$

$\Rightarrow b$ positiv definit

zu (c) $V = \mathcal{C}([a,b])$ = stetige Fkt. auf $[a,b]$

$b(f,g) = f(a)g(a) + f(b)g(b)$

Beh. b ist symmetrische Bilinearform

Seien $f_1, f_2, g_1, g_2 \in V$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

$b(f_1,g_1) = f_1(a)g_1(a) + f_1(b)g_1(b) = g_1(a)f_1(a)$
$+ g_1(b)f_1(b) = b(g_1,f_1)$ Also gilt $b(f,g) = b(g,f)\ \forall f,g \in V$

$$b(f_1+f_2, g_1) = (f_1+f_2)(a) \cdot g_1(a) + (f_1+f_2)(b)\, g_1(b) =$$
$$f_1(a) g_1(a) + f_2(a) g_2(a) + f_1(b) g_1(b) + f_2(b) g_2(b) =$$
$$f_1(a) g_1(a) + f_1(b) g_1(b) + f_2(a) g_2(a) + f_2(b) g_2(b) =$$
$$b(f_1, g_1) + b(f_2, g_1)$$
$$b(f_1, g_1+g_2) \overset{\text{s.o.}}{=} b(g_1+g_2, f_1) \overset{\text{s.o.}}{=} b(g_1, f_1) + b(g_2, f_1)$$
$$\overset{\text{s.o.}}{=} b(f_1, g_1) + b(f_1, g_2)$$
$$b(\lambda f_1, g_1) = (\lambda f_1)(a)\, g_1(a) + (\lambda f_1)(b)\, g_1(b) =$$
$$\lambda\,(f_1(a) g_1(a) + f_1(b) g_1(b)) = \lambda\, b(f_1, g_1) = \dots = b(f_1, \lambda g_1)$$

($\Rightarrow$ Beh.) Bed.: b nicht positiv definit

Betrachte $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ geg durch $f(x) = (x-a)(x-b)$

$\Rightarrow b(f,f) = f(a) \cdot f(a) + f(b) \cdot f(b) = 0$ Andererseits ist $f \neq 0$ ✓

Betrachte $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ geg durch $f(x)=(x-a)(x-b)$

$\Rightarrow b(f,f) = f(a)\cdot f(a) + f(b)\cdot f(b) = 0$. Andererseits ist $f \neq 0$,

denn f hat außer a und b keine reellen Nullstellen, d.h. insb. $f(x) \neq 0 \ \forall x \in \,]a,b[$. $\square$

(Anmerkung: Vorausgesetzt wurde hier $a<b$. Im Fall $a=b$, $[a,b]=\{a\}$, ist b positiv definit!)

$$= \lambda\, b\left(v, \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 6 \end{pmatrix}\right) = \lambda \cdot 0 = 0 \qquad (\Rightarrow \text{Beh})$$

<u>Aufgabe 2</u> $b: \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ Bilinearform mit

$$M_\mathcal{E}(b) = A = \begin{pmatrix} 5 & 8 & 5 \\ 8 & 21 & 15 \\ 5 & 15 & 11 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{E} = (e_1, e_2, e_3)$$

<u>zu (a)</u> gesucht: $M_\mathcal{B}(b)$ für $\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ -5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ -13 \\ 14 \end{pmatrix} \right)$

Lt. Vl gilt $M_\mathcal{B}(b) = {}^tT^\mathcal{B}_\mathcal{E}\, M_\mathcal{E}(b)\, T^\mathcal{B}_\mathcal{E}$

Die Transformationsmatrix $T^\mathcal{B}_\mathcal{E}$ enthält die Elemente von $\mathcal{B}$ als Spalten in $\mathcal{E}$-Koordinaten, d.h. in Standardkoordinaten $\Rightarrow T^\mathcal{B}_\mathcal{E} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 5 \\ -2 & 5 & -13 \\ 2 & -5 & 14 \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow M_\mathcal{B}(b) = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & 5 & -5 \\ 5 & -13 & 14 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 8 & 5 \\ 8 & 21 & 15 \\ 5 & 15 & 11 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 5 \\ -2 & 5 & -13 \\ 2 & -5 & 14 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 5 \\ -3 & 10 & -17 \\ 5 & -17 & 30 \end{pmatrix}$$

<u>zu (b)</u> $W = \text{lin}\left\{\begin{pmatrix}2\\-5\\6\end{pmatrix}\right\}$. $W^{\perp} = \{v \in \mathbb{R}^3 \mid b(v,w) = 0 \ \forall w \in W\}$

gesucht: Basis von $W^{\perp}$ in $\mathcal{E}$- und in $\underline{B}$-Koordinaten

<u>Beh.</u>: Für jedes $v \in \mathbb{R}^3$ gilt $v \in W^{\perp} \Leftrightarrow b\left(v, \begin{pmatrix}2\\-5\\6\end{pmatrix}\right) = 0$.

„$\Longrightarrow$" $\begin{pmatrix}2\\-5\\6\end{pmatrix} \in W$, $v \in W^{\perp} \Rightarrow b(v,w) = 0 \ \forall w \in W$

Insb. gilt also $b\left(v, \begin{pmatrix}2\\-5\\6\end{pmatrix}\right) = 0$

„$\Longleftarrow$" Sei $v \in V$ mit $b\left(v, \begin{pmatrix}2\\-5\\6\end{pmatrix}\right)$. z.zg.: $b(v,w) = 0 \ \forall w \in W$

Sei also $w \in W$. $\Rightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R}: w = \lambda \cdot \begin{pmatrix}2\\-5\\6\end{pmatrix} \Rightarrow b(v,w) = b\left(v, \lambda \begin{pmatrix}2\\-5\\6\end{pmatrix}\right)$

$= \lambda\, b\left(v, \begin{pmatrix}2\\-5\\6\end{pmatrix}\right) = \lambda \cdot 0 = 0$ $\quad$ ($\Rightarrow$ Beh)

Sei nun $v = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$. Dann gilt

$$v \in W^\perp \overset{\text{s.o.}}{\iff} b(v,w) = 0 \overset{(*)}{\iff} (x\ y\ z)\, A \cdot w = 0$$

$$\iff (x\ y\ z) \begin{pmatrix} 5 & 8 & 5 \\ 8 & 21 & 15 \\ 5 & 15 & 11 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 6 \end{pmatrix} = 0 \iff$$

$$(x\ y\ z) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \iff y + z = 0 \quad (*)$$

zu (*) allgemein: $b(v,w) = {}^t\Phi_{\mathcal{B}}(v)\, M_{\mathcal{B}}(b)\, \Phi_{\mathcal{B}}(w)$

hier: $b(v,w) = {}^t\Phi_{\mathcal{E}}(v)\, M_{\mathcal{E}}(b)\, \Phi_{\mathcal{E}}(w) = {}^t v \cdot A\ w$

Also besteht $W^\perp$ genau aus den Lösungen von (*).

Bestimmung des Lösungsraums:

$$\mathcal{L} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; y = -z \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ -z \\ z \end{pmatrix} \;\middle|\; x, z \in \mathbb{R} \right\} =$$

$$\left\{ x \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \;\middle|\; x, z \in \mathbb{R} \right\} \Rightarrow \text{Basis von } W^{\perp}$$

in $\mathcal{E}$-Koordniaten ist $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

Berechnung einer Basis in $\mathcal{B}$-Koordinaten:

1. Möglichkeit: Umrechnung der Basis in $\mathcal{B}$-Koordinaten

$$T^{\mathcal{E}}_{\mathcal{B}} = \left(T^{\mathcal{B}}_{\mathcal{E}}\right)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 5 \\ -2 & 5 & -13 \\ 2 & -5 & 14 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 1 \\ 2 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Phi_{\mathcal{B}}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = T^{\mathcal{E}}_{\mathcal{B}} \, \Phi_{\mathcal{E}}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = T^{\mathcal{E}}_{\mathcal{B}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Phi_B\left(\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}5&3&1\\2&4&3\\0&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-2\\-1\\0\end{pmatrix}$$

$\Longrightarrow$ Basis von $W^\perp$ in B-Koordinaten: $\left\{\begin{pmatrix}5\\2\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-2\\-1\\0\end{pmatrix}\right\}$

2. Möglichkeit: Berechne die Basis direkt in B-Koordinaten.

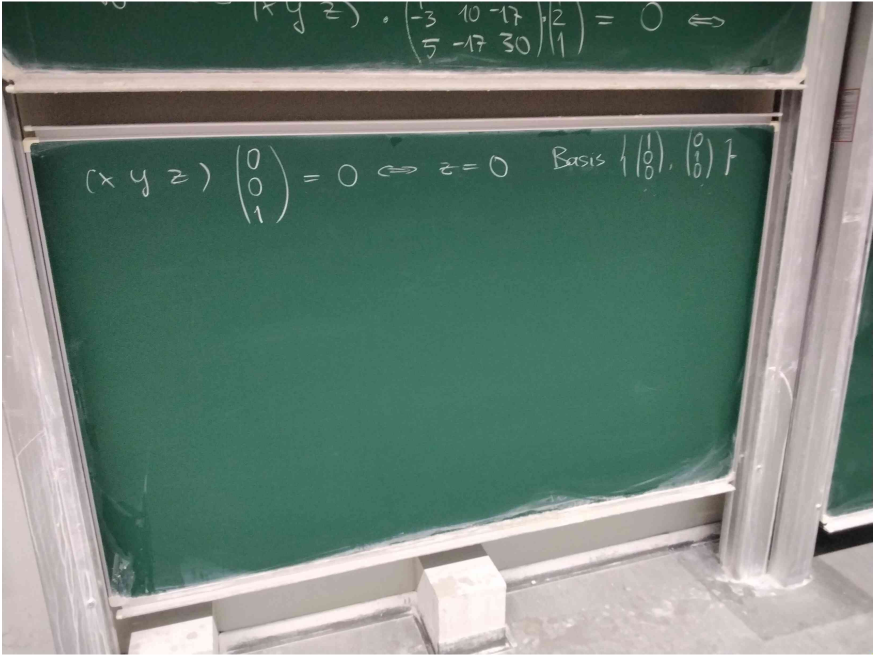
Sei $v \in \mathbb{R}^3$ mit $\Phi_B(v) = \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$

$$v \in W^\perp \iff b\left(v, \begin{pmatrix}2\\-5\\6\end{pmatrix}\right) = 0 \iff \overset{(*)}{{}^t\Phi_B(v)\, M_B(b)\, \Phi_B\left(\begin{pmatrix}2\\-5\\6\end{pmatrix}\right)}$$

$= 0$ Darstellung von $\begin{pmatrix}2\\-5\\6\end{pmatrix}$ als Linearkomb. von B

liefert $\Phi_B\left(\begin{pmatrix}2\\-5\\6\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$ einsetzen in (*):

$$v \in W^\perp \iff (x\ y\ z)\cdot\begin{pmatrix}1&-3&5\\-3&10&-17\\5&-17&30\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix} = 0 \iff$$


$(x\ y\ z)\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} = 0 \iff z = 0$
Basis $\left\{ \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} \right\}$

Aufgabe 3

V = Pol-funktionen vom Grad ≤ 2, $b: V \times V \to \mathbb{R}$ geg. durch $b(f,g) = \int_{-1}^{2} f(x)\, g(x)\, dx$

zu (c) gesucht: ON-Basis $B' = (f_0, f_1, f_2)$ von V bzgl. b mit $f_0(x) = \frac{1}{\sqrt{3}}$

Gram-Schmidt-Verfahren.

Für jeden neuen Basisvektor drei Schritte

- Wähle Vektor $v_{k+1} \notin \mathrm{lin}(u_1, \dots, u_k)$, projiziere diesen auf ein Vektor $w_{k+1} \in \mathrm{lin}(u_1, \dots, u_k)$
- Bilde die Differenz $\tilde{u}_{k+1} = v_{k+1} - w_{k+1}$
- Normiere $\tilde{u}_{k+1}$ zu u_{k+1}.

$\ldots b(x, u_n)\cdot u_n$

hier: $u_0 = f_0 = \frac{1}{\sqrt{3}}$

Setze $v_1 = x$

Projektion: $w_1 = b(x, u_0)\, u_0 = \int_{-1}^{2} \frac{1}{\sqrt{3}}\, x \, dx \cdot u_0$

$= \frac{1}{2}\sqrt{3} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{1}{2}$

Differenz: $\tilde{u}_1 = v_1 - w_1 = x - \frac{1}{2}$

Normierung: $b(\tilde{u}_1, \tilde{u}_1) = \int_{-1}^{2} (x - \frac{1}{2})^2 \, dx = \frac{9}{4}$

$\|\tilde{u}_1\|_b = \sqrt{\frac{9}{4}} = \frac{3}{2}$

$u_1 = \|\tilde{u}_1\|_b^{-1} \cdot (x - \frac{1}{2}) = \frac{2}{3}(x - \frac{1}{2}) = \frac{2}{3}x - \frac{1}{3}$

Setze $v_2 = x^2$

Projektion: $w_2 = b(x^2, u_0)\, u_0 + b(x^2, u_1)\, u_1$

$= \sqrt{3}\, u_0 + 3/2\, u_1 = \sqrt{3}\,\frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{3}{2}\left(\frac{2}{3}x - \frac{1}{3}\right) = x + \frac{1}{2}$

$$b(u_1, u_1) = \int_{-1} (x-\tfrac{1}{2})^2\,dx = \tfrac{9}{4}$$

$$\|\tilde{u}_1\| = \sqrt{\tfrac{9}{4}} = \tfrac{3}{2}$$

Differenz: $\tilde{u}_2 = v_2 - w_2 = x^2 - x - \frac{1}{2}$

Normierung: $b(\tilde{u}_2, \tilde{u}_2) = \int_{-1}^{2} (x^2 - x - \frac{1}{2})^2\,dx = \frac{27}{20}$

$$\|\tilde{u}_2\| = \sqrt{\frac{27}{20}} = \frac{3}{2}\sqrt{\frac{3}{5}}$$

$$u_2 = \|\tilde{u}_2\|^{-1} u_2 = \frac{2\sqrt{5}}{3\sqrt{3}}\left(x^2 - x - \frac{1}{2}\right)$$

$\Rightarrow$ ON-Basis $\left(\frac{1}{\sqrt{3}},\ \frac{2}{3}x - \frac{1}{3},\ \frac{2\sqrt{5}}{3\sqrt{3}}\left(x^2 - x - \frac{1}{2}\right)\right)$

$$\int_{-1}^{2} \frac{1}{\sqrt{3}}\, x\,dx = \frac{1}{\sqrt{3}}\left[\frac{1}{2}x^2\right]_{-1}^{2} = \frac{1}{\sqrt{3}}\left(\frac{1}{2}\cdot(4-1)\right) = \frac{1}{2}\sqrt{3}$$

$$\langle x, u_0\rangle u_0 + \langle x, u_1\rangle u_1 + \dots + \langle x, u_n\rangle u_n$$

$$b(x, u_0)\, u_0 + b(x, u_1) u_1 + \dots + b(x, u_n)\cdot u_n$$