Analysis mehrerer Variablen

— Lösung Blatt 3 —

(Globalübungsblatt)

Aufgabe 1

zu (a) Diese Abbildung ist im Allgemeinen keine Bilinearform. Sei $V = \mathbb{R}^n$ mit $n \geq 2$, und seien $x = e_1$ und $y = e_2$ die ersten beiden Einheitsvektoren. Dann gilt $b(e_1, e_1) = \max\{1, 0, ..., 0\} \max\{1, 0, ..., 0\} = 1 \cdot 1 = 1$, $b(e_1, e_2) = \max\{1, 0, ..., 0\} \max\{0, 1, 0, ..., 0\} = 1 \cdot 1 = 1$, also $b(e_1, e_1) + b(e_1, e_2) = 1 + 1 = 2$. Anderseits gilt $b(e_1, e_1 + e_2) = \max\{1, 0, ..., 0\} \max\{1, 1, 0, ..., 0\} = 1 \cdot 1 = 1$. Somit ist $b(e_1, e_1 + e_2) \neq b(e_1, e_1) + b(e_1, e_2)$. Also ist b keine Bilinearform, erst recht keine symmetrische oder positiv definite.

zu (b) Wir überprüfen, dass b eine Bilinearform ist, indem wir die bekannten Rechenregeln ($\mathrm{Re}(z+w) = \mathrm{Re}(z) + \mathrm{Re}(w)$ und $\mathrm{Re}(az) = a\mathrm{Re}(z)$ für alle $z, w \in \mathbb{C}$ und $a \in \mathbb{R}$) für den Realteil komplexer Zahlen verwenden. Seien $z, z', w, w' \in \mathbb{C}$ und $a \in \mathbb{R}$ vorgegeben. Dann gilt

$$b(z + z', w) = \mathrm{Re}(\overline{z + z'}w) = \mathrm{Re}(\bar{z}w + \bar{z}'w) = \mathrm{Re}(\bar{z}w) + \mathrm{Re}(\bar{z}'w) = b(z, w) + b(z', w)$$
$$b(az, w) = \mathrm{Re}(\overline{az}w) = \mathrm{Re}(\bar{a}\bar{z}w) = \mathrm{Re}(a\bar{z}w) = a\mathrm{Re}(\bar{z}w) = ab(z, w)$$
$$b(z, w + w') = \mathrm{Re}(\bar{z}(w + w')) = \mathrm{Re}(\bar{z}w) + \mathrm{Re}(\bar{z}w') = b(z, w) + b(z, w')$$
$$b(z, aw) = \mathrm{Re}(\bar{z}aw) = a\mathrm{Re}(\bar{z}w) = ab(z, w)$$

Die Bilinearform ist auch symmetrisch, denn für alle $z, w \in \mathbb{C}$ gilt $b(w, z) = \mathrm{Re}(\bar{w}z) = \mathrm{Re}(\overline{\bar{w}z}) = \mathrm{Re}(w\bar{z}) = \mathrm{Re}(\bar{z}, w) = b(z, w)$. Außerdem ist $\bar{z}z$ für alle $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ reell und positiv. Daraus folgt $b(z, z) = \mathrm{Re}(\bar{z}z) = \bar{z}z > 0$. Dies zeigt, dass b sogar ein Skalarprodukt ist.

zu (c) Auch hier überprüfen wir zunächst, dass b eine Bilinearform ist. Seien $f_1, f_2, g_1, g_2 \in V$ und $\lambda \in \mathbb{R}$ vorgegeben. Dann gilt

$$\begin{gathered} b(f_1 + f_2, g_1) = (f_1 + f_2)(a)g_1(a) + (f_1 + f_2)(b)g_1(b) = (f_1(a) + f_2(a))g_1(a) + (f_1(b) + f_2(b))g_1(b) = \\ f_1(a)g_1(a) + f_2(a)g_1(a) + f_1(b)g_1(b) + f_2(b)g_1(b) = f_1(a)g_1(a) + f_1(b)g_1(b) + f_2(a)g_1(a) + f_2(b)g_1(b) \\ = b(f_1, g_1) + b(f_2, g_1) \end{gathered}$$

$$b(\lambda f_1, g_1) = (\lambda f_1)(a)g_1(a) + (\lambda f_1)(b)g_1(b) = \lambda f_1(a)g_1(a) + \lambda f_1(b)g_1(b) = \lambda\left(f_1(a)g_1(a) + f_1(b)g_1(b)\right) = \lambda b(f_1, g_1).$$

$$\begin{gathered} b(f_1, g_1 + g_2) = f_1(a)(g_1 + g_2)(a) + f_1(b)(g_1 + g_2)(b) = f_1(a)g_1(a) + f_1(a)g_2(a) + f_1(b)g_1(b) + f_1(b)g_2(b) = \\ (f_1(a)g_1(a) + f_1(b)g_1(b)) + (f_1(a)g_2(a) + f_1(b)g_2(b)) = b(f_1, g_1) + b(f_1, g_2) \end{gathered}$$

$$b(f_1, \lambda g_1) = f_1(a)(\lambda g_1)(a) + f_1(b)(\lambda g_1)(b) = \lambda f_1(a)g_1(a) + \lambda f_1(b)g_1(b) = \lambda\left(f_1(a)g_1(a) + f_1(b)g_1(b)\right) = \lambda b(f_1, g_1).$$

Die Bilinearform ist aber im Fall $a < b$ nicht positiv definit. Dafür genügt es, eine beliebige stetige Funktion ungleich Null zu betrachten, die in a und b eine Nullstelle besitzt, zum Beispiel die Polynomfunktion $f(x) = (x-a)(x-b)$. Bekanntlich sind Polynomfunktionen stetig, und es ist $f \neq 0_V$, da a und b die einzigen Nullstellen von f sind. Andererseits gilt

$$f(a) \quad = \quad (a-a)(a-b) \quad = \quad 0 \cdot (a-b) \quad = \quad 0$$

und ebenso

$$f(b) \quad = \quad (b-a)(b-b) \quad = \quad (b-a) \cdot 0 \quad = \quad 0.$$

Daraus folgt $b(f,f) = f(a)^2 + f(b)^2 = 0^2 + 0^2 = 0$, was bei einer positiv definiten symmetrischen Bilinearform unzulässig ist.

Aufgabe 2

zu (a) Zunächst bestimmen wir die Transformationsmatrix $T_{\mathcal{E}}^{\mathcal{B}}$. Diese erhält man dadurch, dass man die Elemente von $\mathcal{B}$ als Spaltenvektoren in die Matrix einträgt, also

$$T_{\mathcal{E}}^{\mathcal{B}} \quad = \quad \begin{pmatrix} 1 & -2 & 5 \\ -2 & 5 & -13 \\ 2 & -5 & 14 \end{pmatrix}.$$

Nun verwenden wir die Transformationsformel für Bilinearformen aus der Vorlesung. Es gilt

$$\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(b) \quad = \quad {}^{\mathrm{t}}T_{\mathcal{E}}^{\mathcal{B}} \mathcal{M}_{\mathcal{E}}(b) T_{\mathcal{E}}^{\mathcal{B}} \quad = \quad \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & 5 & -5 \\ 5 & -13 & 14 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 8 & 5 \\ 8 & 21 & 15 \\ 5 & 15 & 11 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 5 \\ -2 & 5 & -13 \\ 2 & -5 & 14 \end{pmatrix}$$

$$= \quad \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & 5 & -5 \\ 5 & -13 & 14 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 5 & -9 \\ -4 & 14 & -23 \\ -3 & 10 & -16 \end{pmatrix} \quad = \quad \begin{pmatrix} 1 & -3 & 5 \\ -3 & 10 & -17 \\ 5 & -17 & 30 \end{pmatrix}.$$

zu (b) Hier gibt es drei mögliche Vorgehensweisen.

(i) Man verwendet $\mathcal{M}_{\mathcal{E}}(b)$, um eine Basis von W in $\mathcal{E}$-Koordinaten auszurechnen, und rechnet diese anschließend mit der Transformationsmatix $\mathcal{T}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{E}} = (\mathcal{T}_{\mathcal{E}}^{\mathcal{B}})^{-1}$ in $\mathcal{B}$-Koordinaten um.

(ii) Man verwendet $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(b)$, um eine Basis von W in $\mathcal{B}$-Koordinaten auszurechnen, und rechnet diese anschließend mit der Transformationsmatix $\mathcal{T}_{\mathcal{E}}^{\mathcal{B}}$ in $\mathcal{E}$-Koordinaten um.

(iii) Man verwenet $\mathcal{M}_{\mathcal{E}}(b)$, um eine Basis von W in $\mathcal{E}$-Koordinaten auszurechnen, und $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(b)$, um eine Basis von W in $\mathcal{B}$-Koordinaten zu bestimmen.

Wir werden hier die Möglichkeiten (i) und (iii) ausführen. Zuvor bemerken wir noch, dass $W^\perp = \{w_0\}^\perp$ mit $w_0 = (2,-5,6)$ gilt. Die Inklusion „$\subseteq$" ist wegen $W \supseteq \{w_0\}$ offensichtlich. Ist umgekehrt $v \in \{w_0\}^\perp$, dann gilt $b(v,w_0) = 0$. Es folgt $b(v,\lambda w_0) = \lambda b(v,w_0) = \lambda \cdot 0 = 0$ für alle $\lambda \in \mathbb{R}$, also $b(v,w) = 0$ für alle $w \in W = \mathrm{lin}(w_0)$ und damit $v \in W^\perp$.

zu (i) Für einen Vektor $v = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ ist nun $v \in \{w_0\}^\perp$ äquivalent zu

$$b(v, w_0) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad {}^{\mathrm{t}}\Phi_{\mathcal{E}}(v)\ \mathcal{M}_{\mathcal{E}}(b)\ \Phi_{\mathcal{E}}(w_0) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 8 & 5 \\ 8 & 21 & 15 \\ 5 & 15 & 11 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 6 \end{pmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad y + z = 0$$

Die Lösungsmenge $\mathcal{L}$ dieses homogenen linearen Gleichungssystems (bestehend aus einer Gleichung) können wir direkt angeben, es ist $\mathcal{L} = \{(x, -z, z) \mid x, z \in \mathbb{R}\}$. Eine Basis in $\mathcal{E}$-Koordinaten ist durch $\{(1,0,0), (0,-1,1)\}$ gegeben. Um diese Basis nun in $\mathcal{B}$-Koordinaten zu übertragen, berechnen wir zunächst die Transformationsmatrix $T^{\mathcal{E}}_{\mathcal{B}}$ durch Invertierung.

$$T^{\mathcal{E}}_{\mathcal{B}} \quad = \quad (T^{\mathcal{B}}_{\mathcal{E}})^{-1} \quad = \quad \begin{pmatrix} 1 & -2 & 5 \\ -2 & 5 & -13 \\ 2 & -5 & 14 \end{pmatrix}^{-1} \quad = \quad \begin{pmatrix} 5 & 3 & 1 \\ 2 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Nun können wir die Basis in $\mathcal{E}$-Koordinaten in $\mathcal{B}$-Koordinaten umrechnen.

$$\Phi_{\mathcal{B}}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right) \quad = \quad T^{\mathcal{E}}_{\mathcal{B}} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad = \quad \begin{pmatrix} 5 & 3 & 1 \\ 2 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad = \quad \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Phi_{\mathcal{B}}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) \quad = \quad T^{\mathcal{E}}_{\mathcal{B}} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad = \quad \begin{pmatrix} 5 & 3 & 1 \\ 2 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad = \quad \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Also ist $\{(5,2,0), (-2,-1,0)\}$ eine Basis in $\mathcal{B}$-Koordinaten.

zu (iii) Eine Basis von $W^\perp$ in $\mathcal{E}$-Koordinaten haben wir unter (i) schon bestimmt. Für die direkte Berechnung einer Basis in $\mathcal{B}$-Koordinaten müssen wir zunächst den Vektor w_0 in $\mathcal{B}$-Koordinaten umrechnen. Gesucht werden $\mu_1, \mu_2, \mu_3 \in \mathbb{R}^3$ mit $\mu_1 v_1 + \mu_2 v_2 + \mu_3 v_3 = w_0$, also mit

$$\mu_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} + \mu_2 \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ -5 \end{pmatrix} + \mu_3 \begin{pmatrix} 5 \\ -13 \\ 14 \end{pmatrix} \quad = \quad \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

Dieses inhomogene lineare Gleichungssystem lösen wir mit dem Gauß-Algorithmus.

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 5 & 2 \\ -2 & 5 & -13 & -5 \\ 2 & -5 & 14 & 6 \end{pmatrix} \quad \mapsto \quad \begin{pmatrix} 1 & -2 & 5 & 2 \\ 0 & 1 & -3 & -1 \\ 0 & -1 & 4 & 2 \end{pmatrix} \quad \mapsto \quad \begin{pmatrix} 1 & -2 & 5 & 2 \\ 0 & 1 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \mapsto$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \mapsto \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Wir erhalten $\Phi_{\mathcal{B}}(w_0) = (1,2,1)$. Sei nun $v \in \mathbb{R}^3$ ein Vektor mit $\mathcal{B}$-Koordinaten $\Phi_{\mathcal{B}}(v) = (x, y, z)$. Dann gilt die Äquivalenz

$$v \in \{w_0\}^\perp \quad \Leftrightarrow \quad b(v, w_0) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad {}^{\mathrm{t}}\Phi_{\mathcal{B}}(v)\ A\ \Phi_{\mathcal{B}}(w_0) = 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$\begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -3 & 5 \\ -3 & 10 & -17 \\ 5 & -17 & 30 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad z = 0$$

Auch hier können wir direkt eine Basis des Lösungsraums angeben, nämlich $\{(1,0,0),(0,1,0\}$. Man überprüft unmittelbar, dass diese Basis denselben Untervektorraum des $\mathbb{R}^3$ aufspannt, wie die im Lösungsweg (i) gefundene. Denn offenbar sind $(5,2,0)$ und $(-2,-1,0)$ beiden in $\text{lin}\{e_1,e_2\}$ enthalten, und beide Systeme sind linear unabhängig, spannen also jeweils einen zweidimensionalen Untervektorraum vom $\mathbb{R}^3$ auf.

Aufgabe 3

zu (a) Zur Vorbereitung berechnen wir die Integrale der Funktionen $1,...,x^4$ über dem Intervall $[-1,2]$.

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^{2} 1\ dx &= [x]_{-1}^{2} = 2-(-1) = 3 \\
\int_{-1}^{2} x\ dx &= \left[\tfrac{1}{2}x^2\right]_{-1}^{2} = 2-\tfrac{1}{2} = \tfrac{3}{2} \\
\int_{-1}^{2} x^2 &= \left[\tfrac{1}{3}x^3\right]_{-1}^{2} = \tfrac{8}{3}-(-\tfrac{1}{3}) = 3 \\
\int_{-1}^{2} x^3 &= \left[\tfrac{1}{4}x^4\right]_{-1}^{2} = 4-\tfrac{1}{4} = \tfrac{15}{4} \\
\int_{-1}^{2} x^4 &= \left[\tfrac{1}{5}x^5\right]_{-1}^{2} = \tfrac{32}{5}-(-\tfrac{1}{5}) = \tfrac{33}{5}
\end{aligned}$$

Auf Grund der Definition $b(f,g) = \int_{-1}^{2} f(x)g(x)\ dx$ erhalten wir $b(1,1) = \int_{-1}^{2} 1\ dx = 3$, $b(1,x) = \int_{-1}^{2} x\ dx = \frac{3}{2}$, $b(1,x^2) = b(x,x) = \int_{-1}^{2} x^2\ dx = 3$, $b(x,x^2) = \int_{-1}^{2} x^3\ dx = \frac{15}{4}$ und $b(x^2,x^2) = \int_{-1}^{2} x^4\ dx = \frac{33}{5}$. Die übrigen Einträge erhält man ohne Rechnung, weil b offenbar symmetrisch ist. Die gesuchte Matrix ist somit gegeben durch

$$A = \begin{pmatrix} 3 & \frac{3}{2} & 3 \\ \frac{3}{2} & 3 & \frac{15}{4} \\ 3 & \frac{15}{4} & \frac{33}{5} \end{pmatrix}.$$

zu (b) Die Matrix A ist symmetrisch, weil die Bilinearform b symmetrisch ist. Die Determinanten der linken oberen $k \times k$-Teilmatrizen sind für $k = 1,2$ gegeben durch

$$\begin{aligned}
\det\begin{pmatrix} 3 \end{pmatrix} &= 3 \\
\det\begin{pmatrix} 3 & \frac{3}{2} \\ \frac{3}{2} & 3 \end{pmatrix} &= 3^2-(\tfrac{3}{2})^2 = 9-\tfrac{9}{4} = \tfrac{27}{4} \quad ,
\end{aligned}$$

und mit der Sarrus-Regel erhalten wir außerdem $\det(A) = \frac{729}{80}$. Alle Determinanten sind positiv, also ist A nach dem Hurwitz-Kriterium positiv definit.

zu (c) Wir starten mit dem Untervektorraum $\langle f_0 \rangle$, mit $f_0 = \frac{1}{\sqrt{3}}$ aus der Aufgabenstellung. Wie in der Vorlesung beschrieben, beseth das Prinzip des Gram-Schmidt-Verfahren darin, jeden neuen Basisvektor v_k (hier nacheinander die Vektoren 1, x und x^2) auf den bereits konstruierten Untervektorraum $\langle u_0, ..., u_{k-1} \rangle$ zu projizieren, das Bild w_k der Projektion von v_k zu subtrahieren und die Differenz $\tilde{u}_k = v_k - w_k$ anschließend noch zu normieren. Für die Durchführung des Algorithmus verwenden wir dieselben Bezeichnungen wie im Vorlesungsbeispiel.

gegeben: erster Basisvektor

$$u_0 = f_0 = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

Berechnung des zweiten Basisvektors:

$$\begin{aligned}
b(u_0, x) &= \tfrac{1}{\sqrt{3}} b(1, x) = \tfrac{1}{\sqrt{3}} \cdot \tfrac{3}{2} = \tfrac{1}{2}\sqrt{3} \\
w_1 &= b(u_0, x) \cdot u_0 = \tfrac{1}{2}\sqrt{3} \cdot \tfrac{1}{\sqrt{3}} = \tfrac{1}{2} \\
\tilde{u}_1 &= x - w_1 = x - \tfrac{1}{2} \\
\|\tilde{u}_1\|_b^2 &= b(\tilde{u}_1, \tilde{u}_1) = \textstyle\int_{-1}^{2} (x - \tfrac{1}{2})^2 \; dx = \int_{-1}^{2} (x^2 - x + \tfrac{1}{4}) \; dx = 3 - \tfrac{3}{2} \cdot 1 + \tfrac{1}{4} \cdot 3 = \tfrac{3}{2} + \tfrac{3}{4} = \tfrac{9}{4} \\
\|\tilde{u}_1\|_b &= \sqrt{\tfrac{9}{4}} = \tfrac{3}{2} \\
u_1 &= \|\tilde{u}_1\|_b^{-1} u_1 = \tfrac{2}{3}(x - \tfrac{1}{2}) = \tfrac{2}{3}x - \tfrac{1}{3}
\end{aligned}$$

Berechnung des dritten Basisvektors:

$$\begin{aligned}
b(u_0, x^2) &= \tfrac{1}{\sqrt{3}} b(1, x^2) = \tfrac{1}{\sqrt{3}} \cdot 3 = \sqrt{3} \\
b(u_1, x^2) &= (-\tfrac{1}{3}) b(1, x^2) + \tfrac{2}{3} b(x, x^2) = (-\tfrac{1}{3}) \cdot 3 + \tfrac{2}{3} \cdot \tfrac{15}{4} = -1 + \tfrac{5}{2} = \tfrac{3}{2} \\
w_2 &= b(u_0, x^2) u_0 + b(u_1, x^2) u_1 = \sqrt{3} \cdot \tfrac{1}{\sqrt{3}} + \tfrac{3}{2}(\tfrac{2}{3}x - \tfrac{1}{3}) = 1 + x - \tfrac{1}{2} = x + \tfrac{1}{2} \\
\tilde{u}_2 &= x^2 - w_2 = x^2 - x - \tfrac{1}{2} \\
\|\tilde{u}_2\|_b^2 &= b(u_2, u_2) = \textstyle\int_{-1}^{2} (x^2 - x - \tfrac{1}{2})^2 \; dx = \int_{-1}^{2} (x^4 - 2x^3 + x + \tfrac{1}{4}) \; dx = \tfrac{33}{5} - 2 \cdot \tfrac{15}{4} + \tfrac{3}{2} + \tfrac{1}{4} \cdot 3 = \\
& \tfrac{33}{5} - \tfrac{21}{4} = \tfrac{1}{20}(132 - 105) = \tfrac{27}{20} \\
\|\tilde{u}_2\|_b &= \sqrt{\tfrac{27}{20}} = \tfrac{3}{2}\sqrt{\tfrac{3}{5}} \\
u_2 &= \|\tilde{u}_2\|_b^{-1} \tilde{u}_2 = \tfrac{2\sqrt{5}}{3\sqrt{3}}(x^2 - x - \tfrac{1}{2})
\end{aligned}$$

Damit ist (u_0, u_1, u_2) bestehend aus den Vektoren $u_0 = \frac{1}{\sqrt{3}}$, $u_1 = \frac{2}{3}x - \frac{1}{3}$ und $u_2 = \frac{2\sqrt{5}}{3\sqrt{3}}(x^2 - x - \frac{1}{2})$ die gesuchte ON-Basis.