Analysis mehrerer Variablen

— Lösung Blatt 2 —

(Tutoriumsblatt)

Aufgabe 0

zu (a) Als Lösungsraum eines homogenen LGS bestehend aus einer Gleichung in drei Unbekannten ist U zweidimensional. Jede ON-Basis besteht also aus zwei Elementen. Die Vektoren $v = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,-1,0)$ und $w = \frac{1}{\sqrt{6}}(1,1,-2)$ sind beide normiert, orthogonal zueinander und in U enthalten, bilden also eine ON-Basis von U.

zu (b) Nach Proposition (15.14) ist eine Orthogonalprojektion auf U gegeben durch $\pi_U(x) = \langle x, v\rangle v + \langle x, w\rangle w = \frac{1}{\sqrt{2}}(x_1 - x_2) \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}(1,-1,0) + \frac{1}{\sqrt{6}}(x_1 + x_2 - 2x_3) \cdot \frac{1}{\sqrt{6}}(1,1,-2) = \frac{1}{2}(x_1 - x_2)(1,-1,0) + \frac{1}{6}(x_1 + x_2 - 2x_3)(1,1,-2) = (\frac{2}{3}x_1 - \frac{1}{3}x_2 - \frac{1}{3}x_3, -\frac{1}{3}x_1 + \frac{2}{3}x_2 - \frac{1}{3}x_3, -\frac{1}{3}x_1 - \frac{1}{3}x_2 + \frac{2}{3}x_3)$.

zu (c) Zwei affine Unterräume $A, A' \subseteq \mathbb{R}^n$ sind parallel, wenn für die zugehörigen Untervektorräume $\mathcal{L}(A) \subseteq \mathcal{L}(A')$ oder $\mathcal{L}(A') \subseteq \mathcal{L}(A)$ gilt. Ist diese Bedingung nicht erfüllt und gilt außerdem $A \cap A' = \varnothing$, dann sind A und A' windschief.

zu (d) Ausgehend von einer Darstellung $A = v + \mathcal{L}(A)$ und $A' = v' + \mathcal{L}(A')$ bestimmt man zunächst eine ON-Basis von $U = \mathcal{L}(A) + \mathcal{L}(A')$. Dann berechnet man $w = \pi_U(v' - v)$. Der Abstand von A und A' ist dann gegeben durch $\|v' - v - w\|$.

Aufgabe 1

zu (a) Der Untervektorraum $\mathcal{L}(E)$ wird erzeugt von $u_1 = (1,2,0,0)$ und $u_2 = (-2,0,1,0)$, der Untervektorraum $\mathcal{L}(g)$ von $u_3 = (2,-1,4,0)$. Somit ist $\{u_1, u_2, u_3\}$ ein Erzeugendensystem von $U = \mathcal{L}(g) + \mathcal{L}(E)$. Die Rechnung

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 4 & 0 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & -5 & 4 & 0 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 5 & 0 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 5 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\mapsto \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 21 & 0 \end{pmatrix}$$

zeigt, dass $\dim U = 3$ gilt. (Die letzte Matrix in der Rechnung ist offensichtlich vom Zeilenrang 3, also muss dasselbe auch für die erste Matrix mit den Zeilenvektoren u_1, u_2, u_3 gelten.) Mit den Vektoren u_1, u_2, u_3 ist auch der Untervektorraum U in $\mathbb{R}^3 \times \{0\} = \mathrm{lin}\{e_1, e_2, e_3\}$ enthalten. Weil $\mathrm{lin}\{e_1, e_2, e_3\}$ ebenfalls dreidimensional ist, muss $U = \mathrm{lin}\{e_1, e_2, e_3\}$ gelten.

zu (b) Das Tupel (e_1, e_2, e_3) ist eine ON-Basis von U. Somit ist durch $\pi_U(x) = \langle x, e_1\rangle e_1 + \langle x, e_2\rangle e_2 + \langle x, e_3\rangle e_3 = x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3 = (x_1, x_2, x_3, 0)$ die Orthogonalprojektion auf U definiert. Wie in Satz (15.18) bilden wir die Differenz $(-1,2,-4,4) - (1,1,0,1) = (-2,1,-4,3)$. Es gilt dann $d(g,E) = \|(-2,1,4,3) - \pi_U(-2,1,4,3)\| = \|(-2,1,4,3) - (-2,1,4,0)\| = \|(0,0,0,3)\| = 3$.

Aufgabe 2

zu (a) Für jeden Punkt $v \in E$ ist $v - p$ in $\mathcal{L}(E)$ enthalten, und wegen $n \perp \mathcal{L}(E)$ gilt $\langle v - p, n\rangle = 0$. Daraus folgt $s_E(v) = v - 2\langle v - p, n\rangle n = v - 2 \cdot 0 \cdot n = v$. Damit ist $s_E|_E = \mathrm{id}_E$ nachgewiesen. Ist $v \in \mathbb{R}^3$ beliebig, dann gilt

$$s_E^2(v) \quad = \quad s_E(s_E(v)) \quad = \quad s_E(v - 2\langle v-p,n\rangle n) \quad = \quad (v - 2\langle v-p,n\rangle n) - 2\left\langle (v - 2\langle v-p,n\rangle n) - p, n\right\rangle n$$
$$= \quad v - 2\langle v-p,n\rangle n - 2\left\langle v - p - 2\langle v-p,n\rangle n, n\right\rangle n \quad = \quad v - 2\langle v-p,n\rangle n - 2\langle v-p,n\rangle n - 2\langle 2\langle v-p,n\rangle n, n\rangle n$$
$$= \quad v - 4\langle v-p,n\rangle n + 4\langle v-p,n\rangle\langle n,n\rangle n \quad = \quad v - 4\langle v-p,n\rangle n + 4\langle v-p,n\rangle \cdot 1 \cdot n \quad = \quad v.$$

Dies zeigt, dass auch $s_E^2 = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}$ erfüllt ist.

zu (b) Weil E und E' parallel sind, gilt $\mathcal{L}(E) = \mathcal{L}(E')$ und damit auch $n \perp \mathcal{L}(E')$. Die Abbildung $s_{E'}$ hat also die Form $s_{E'}(v) = v - 2\langle v - q, n\rangle n$, wobei $q \in \mathbb{R}^3$ einen Vektor mit $E' = q + \mathcal{L}(E) = q + \mathcal{L}(E')$ bezeichnet. Für alle $v \in \mathbb{R}^3$ gilt

$$\begin{aligned}(s_{E'} \circ s_E)(v) \quad &= \quad s_{E'}(s_E(v)) \quad = \quad s_{E'}(v - 2\langle v-p,n\rangle n) \\ &= \quad (v - 2\langle v-p,n\rangle n) - 2\langle (v - 2\langle v-p,n\rangle n) - q, n\rangle n \\ &= \quad v - 2\langle v-p,n\rangle n - 2\langle v-q,n\rangle n - 2\langle -2\langle v-p,n\rangle n, n\rangle n \\ &= \quad v - 2\langle v-p,n\rangle n - 2\langle v-q,n\rangle n + 4\langle v-p,n\rangle\langle n,n\rangle n \\ &= \quad v - 2\langle v-p,n\rangle n - 2\langle v-q,n\rangle n + 4\langle v-p,n\rangle \cdot 1 \cdot n \\ &= \quad v + 2\langle v-p,n\rangle n - 2\langle v-q,n\rangle n \quad = \quad v + 2\langle q-p,n\rangle n\end{aligned}$$

Dies zeigt, dass $s_{E'} \circ s_E$ eine Translation um ein Vielfaches λn von n ist, mit dem Vorfaktor $\lambda = 2\langle q - p, n\rangle$. Der Translationsvektor ist das Doppelte der Orthogonalprojektion des Vektors $q - p$ auf die zu den Ebenen orthogonale, lineare Gerade $\mathrm{lin}(n)$.

Aufgabe 3

zu (a) De Mittelpunkt der Seite AB ist $\frac{1}{2}A + \frac{1}{2}B$, und ein Vektor $w \in \mathbb{R}^2$ steht genau dann orthogonal auf der Seiten, wenn $\langle w, \overrightarrow{AB}\rangle = 0$ gilt. Ein Vektor $v \in \mathbb{R}^3$ liegt also genau dann auf der Mittelsenkrechten, wenn ein $w \in \mathbb{R}^2$ mit $x = \frac{1}{2}A + \frac{1}{2}B + w$ mit $\langle w, \overrightarrow{AB}\rangle = 0$ existiert. Dies wiederum ist äquivalent zu

$$\langle x - \tfrac{1}{2}A - \tfrac{1}{2}B, \overrightarrow{AB}\rangle = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \langle x, \overrightarrow{AB}\rangle = \langle \tfrac{1}{2}A + \tfrac{1}{2}B, B - A\rangle \quad \Leftrightarrow \quad \langle x, \overrightarrow{AB}\rangle = \tfrac{1}{2}\langle B + A, B - A\rangle$$
$$\Leftrightarrow \quad \langle x, \overrightarrow{AB}\rangle = \tfrac{1}{2}\left(\langle B, B\rangle + \langle A, B\rangle - \langle B, A\rangle - \langle A, A\rangle\right) \quad \Leftrightarrow \quad \langle x, \overrightarrow{AB}\rangle = \tfrac{1}{2}\left(\langle B, B\rangle - \langle A, A\rangle\right)$$

Durch analoge Rechnungen findet man für die Mittelsenkrechte durch BC die Gleichung $\langle x, \overrightarrow{BC}\rangle = \frac{1}{2}(\langle C, C\rangle - \langle B, B\rangle)$, und für die Mittelsenkrechte durch CA die Gleichung $\langle x, \overrightarrow{CA}\rangle = \frac{1}{2}(\langle A, A\rangle - \langle C, C\rangle)$.

zu (b) Ein Punkt $x \in \mathbb{R}^3$ liegt genau dann auf dem Schnittpunkt der beiden Mittelsenkrechten durch AB und BC, wenn er die ersten beiden in Teil (a) angegebenen Gleichungen erfüllt. Addiert man diese beiden Gleichungen, so erhält man auf der rechten Seite $\frac{1}{2}(\langle C, C\rangle - \langle A, A\rangle)$, auf der linken Seite wegen $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = (B - A) + (C - B) = C - A$ den Ausdruck $\langle x, \overrightarrow{AC}\rangle$. Aber $\langle x, \overrightarrow{AC}\rangle = \frac{1}{2}(\langle C, C\rangle - \langle A, A\rangle)$ ist das Negative der Gleichung der Mittelsenkrechten durch CA. Dies zeigt, dass auch die dritte Mittelsenkrechte durch den Schnittpunkt läuft.

zu (c) Sei $x \in \mathbb{R}^3$ ein Punkt auf der Mittelsenkrechten durch AB, also ein Punkt mit $\langle x, \overrightarrow{AB} \rangle = \frac{1}{2}(\langle B, B\rangle - \langle A, A\rangle)$. Für die Abstandsquadrate dieses Punktes von A und B gilt

$$\|x-A\|^2 - \|x-B\|^2 \quad = \quad \langle x-A, x-A\rangle - \langle x-B, x-B\rangle \quad =$$
$$\langle x,x\rangle - 2\langle x,A\rangle + \langle A,A\rangle - \langle x,x\rangle + 2\langle x,B\rangle - \langle B,B\rangle \quad = \quad 2\langle x,B\rangle - 2\langle x,A\rangle + \langle A,A\rangle - \langle B,B\rangle \quad =$$
$$2\langle x, B-A\rangle + \langle A,A\rangle - \langle B,B\rangle \quad = \quad 2\langle x, \overrightarrow{AB}\rangle + \langle A,A\rangle - \langle B,B\rangle \quad = \quad 2\cdot\tfrac{1}{2}(b^2-a^2) + \langle A,A\rangle - \langle B,B\rangle \quad = \quad 0.$$

Daraus folgt $\|x-A\| = \|x-B\|$, der Punkt x hat also von A und B tatsächlich denselben Abstand. Der Schnittpunkt p der drei Mittelsenkrechten hat somit von A, B und C denselben Abstand r. Der Kreis vom Radius r mit Mittelpunkt p läuft also durch alle drei Eckpunkte des Dreiecks.