

Lineare Algebra

— Lösung Blatt 2 —

(Globalübungsblatt)

Aufgabe 1

zu (a) Nach Satz (15.18) ist der Abstand $d(E, E')$ gegeben durch $\|p' - p - w\|$, wobei p einen beliebigen Punkt auf E , p' einen beliebigen Punkt auf E' und w die Orthogonalprojektion $\pi_U(p' - p)$ von $p' - p$ auf den Untervektorraum $U = \mathcal{L}(E) + \mathcal{L}(E')$ bezeichnet.

Wir bestimmen zunächst $\mathcal{L}(E)$. Sei $p = (p_1, p_2, p_3) \in E$ ein beliebiger Punkt und $n = (a, b, c)$; nach Voraussetzung ist dieser Vektor normiert. Für jeden Vektor $v = (v_1, v_2, v_3) \in \mathbb{R}^3$ gilt die Äquivalenz

$$\begin{aligned} v \in \mathcal{L}(E) &\Leftrightarrow p + v \in E \Leftrightarrow a(p_1 + v_1) + b(p_2 + v_2) + c(p_3 + v_3) = d \Leftrightarrow \\ &(ap_1 + bp_2 + cp_3) + (av_1 + bv_2 + cv_3) = d \Leftrightarrow d + (av_1 + bv_2 + cv_3) = d \Leftrightarrow \\ &av_1 + bv_2 + cv_3 = 0 \Leftrightarrow \langle n, v \rangle = 0 \Leftrightarrow v \in \text{lin}(n)^\perp. \end{aligned}$$

Es gilt also $\mathcal{L}(E) = \text{lin}(n)^\perp$. Ebenso zeigt man, dass $\mathcal{L}(E') = \text{lin}(n)^\perp$ gilt, und wir erhalten $U = \mathcal{L}(E) + \mathcal{L}(E') = \text{lin}(n)^\perp + \text{lin}(n)^\perp = \text{lin}(n)^\perp$.

Sei nun (v, w) eine ON-Basis von U . Wegen $n \perp U$ gilt $n \perp v$ und $n \perp w$, außerdem sind alle Vektoren normiert. Dies zeigt, dass (v, w, n) eine ON-Basis des $\mathbb{R}^3$ ist. Seien $p \in E$ und $p' \in E$ beliebige Punkte, und sei $w = \pi_U(p' - p)$. Außerdem sei $p' - p = \alpha v + \beta w + \gamma n$ eine Darstellung von $p' - p$ als Linearkombination von (v, w, n) , mit $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$. Wegen $\langle n, v \rangle = \langle n, w \rangle = 0$ gilt dann

$$\pi_U(p' - p) = \langle p' - p, v \rangle v + \langle p' - p, w \rangle w = \langle \alpha v + \beta w + \gamma n, v \rangle v + \langle \alpha v + \beta w + \gamma n, w \rangle w = \alpha v + \beta w$$

und $p' - p - \pi_U(p' - p) = \gamma n$. Wegen $n \perp U$ ist dabei

$$\begin{aligned} \gamma &= \gamma \langle n, n \rangle = \langle \gamma n, n \rangle = \langle p' - p - \pi_U(p' - p), n \rangle = \langle p' - p, n \rangle = \\ &\langle p', n \rangle - \langle p, n \rangle = (ap'_1 + bp'_2 + cp'_3) - (ap_1 + bp_2 + cp_3) = d' - d. \end{aligned}$$

Wir erhalten $d(E, E') = \|p' - p - \pi_U(p' - p)\| = \|\gamma n\| = |\gamma| \|n\| = |\gamma| = |d' - d|$.

zu (b) Seien $A_1 = p_1 + U_1$ und $A_2 = p_2 + U_2$ zwei affine Unterräume mit den angegebenen Eigenschaften, mit $d_1 = \dim(A_1) = \dim(U_1)$ und $d_2 = \dim(A_2) = \dim(U_2)$. Nach Voraussetzung gilt $A_1 \cap A_2 = \emptyset$. Daraus folgt, dass $p_2 - p_1$ nicht in $U_1 + U_2$ enthalten ist. Den anderenfalls gäbe es $u_1, u_2 \in U$ mit $p_2 - p_1 = u_1 + u_2$, und dann wäre $p_1 + u_1 = p_2 - u_2$ ein Punkt in $A_1 \cap A_2$. Aus $p_2 - p_1 \notin U_1 + U_2$ folgt $U_1 + U_2 \subsetneq \mathbb{R}^4$ und $\dim(U_1 + U_2) \leq 3$.

Weil U_1 und U_2 windschief sind, gilt weder $U_1 \subseteq U_2$ noch $U_2 \subseteq U_1$. Aus $U_1 \not\subseteq U_2$ folgt $U_1 \cap U_2 \subsetneq U_1$ und $\dim(U_1 \cap U_2) \leq \dim(U_1) - 1$. Mit dem Schnittdimensionssatz erhalten wir

$$\dim(U_1 + U_2) = \dim(U_1) + \dim(U_2) - \dim(U_1 \cap U_2) \geq \dim(U_2) + 1.$$

Daraus folgt $\dim(U_2) \leq \dim(U_1 + U_2) - 1 \leq 2$. Da außerdem nach Voraussetzung $d_1 \leq d_2$ gelten soll, sind die einzigen Möglichkeiten für das Paar (d_1, d_2) gegeben durch $(1, 1)$, $(1, 2)$ und $(2, 2)$.

Für jedes solche Paar gibt es tatsächlich windschiefe affine Unterräume mit leerem Durchschnitt. Für $(d_1, d_2) = (2, 2)$ haben beispielsweise $A_1 = \text{lin}(e_1, e_2)$ und $A_2 = e_3 + \text{lin}(e_2, e_4)$ diese Eigenschaft. Für $(d_1, d_2) = (1, 2)$ kann man beispielsweise $A_1 = \text{lin}(e_1)$ und $A_2 = e_3 + \text{lin}(e_2, e_4)$ nehmen, und für $(d_1, d_2) = (1, 1)$ die beiden affinen Unterräume $A_1 = \text{lin}(e_1)$ und $A_2 = e_3 + \text{lin}(e_2)$.

Aufgabe 2

zu (a) Sei $w \in \mathbb{R}^2$ ein Vektor mit $\mathcal{L}(g) = \text{lin}(w)$ und $n \in \mathbb{R}^2$ ein normierter Vektor mit $n \perp \mathcal{L}(g)$. Dann gilt $\langle w, n \rangle = 0$. Für alle $v \in \mathbb{R}^2$ erhalten wir

$$\begin{aligned} s_{g,w}(v) &= (s_g \circ \tau_w)(v) = s_g(v+w) = (v+w) - 2\langle v+w-p, n \rangle n = \\ v+w-2\langle v-p, n \rangle n - 2\langle w, n \rangle n &= v+w-2\langle v-p, n \rangle n = w+s_g(v) = (\tau_w \circ s_g)(v). \end{aligned}$$

zu (b) Sei ϕ eine orientierungserhaltende Bewegung des $\mathbb{R}^2$. Nach Satz (15.28) gibt es einen Vektor $u \in \mathbb{R}^2$ und eine Matrix $A \in \text{SO}(2)$, so dass $\phi = \tau_u \circ \phi_A$ gilt. Wir zeigen zunächst, dass A eine Drehmatrix ist. Setzen wir

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},$$

dann gilt nach Prop. (15.24)

$$a^2 + c^2 = \left\langle \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix} \right\rangle = \langle Ae_1, Ae_1 \rangle = \langle e_1, e_1 \rangle = 1.$$

Es gibt also ein $\alpha \in [0, 2\pi[$ mit $a = \cos(\alpha)$ und $c = \sin(\alpha)$. Auf Grund der Orthogonalität von A und wegen $\det(A) = 1$ gilt außerdem

$$\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = {}^t \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix},$$

woraus $d = a = \cos(\alpha)$ und $b = -c = -\sin(\alpha)$ folgt. Insgesamt gilt also

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix} = D_\alpha.$$

Ist nun $\alpha = 0$, dann gilt $D_\alpha = E_2$, und $\phi = \tau_u \circ \phi_{E_2} = \tau_u$ ist eine Translation. Für den Fall $0 < \alpha < 2\pi$ zeigen wir, dass ϕ eine Drehung ist. Zunächst bestimmen wir einen Fixpunkt von ϕ , denn dies ist das Drehzentrum. Für alle $v \in \mathbb{R}^2$ gilt die Äquivalenz

$$\begin{aligned} \phi(v) = v &\Leftrightarrow (\tau_u \circ \phi_{D_\alpha})(v) = v \Leftrightarrow u + D_\alpha v = v \Leftrightarrow u + D_\alpha v = E_2 v \Leftrightarrow \\ u &= (E_2 - D_\alpha)v \Leftrightarrow v = (E_2 - D_\alpha)^{-1}u. \end{aligned}$$

Dabei ist im letzten Schritt zu beachten, dass die 1 keine Nullstelle des charakteristischen Polynoms $\chi_{D_\alpha} = (x - \cos(\alpha))^2 + \sin(\alpha)^2 = x^2 - 2\cos(\alpha)x + 1$ ist (denn daraus würde $\cos(\alpha) = 1$ und $\alpha = 0$ folgen), also 1 kein Eigenwert von D_α , und somit $\ker(E_2 - D_\alpha) = \text{Eig}(D_\alpha, 1) = \{0_{\mathbb{R}^2}\}$, die Matrix $E_2 - D_\alpha$ also invertierbar ist.

Sei nun $p = (E_2 - D_\alpha)^{-1}u$. Wir zeigen, dass ϕ mit der Drehung $\rho_{\alpha,p}$ um den Punkt p mit Winkel α übereinstimmt. Tatsächlich gilt für alle $v \in \mathbb{R}^2$ jeweils

$$\begin{aligned} \rho_{\alpha,p}(v) &= (\tau_p \circ \phi_{D_\alpha} \circ \tau_{-p})(v) = (\tau_p \circ \phi_{D_\alpha})(v-p) = \tau_p(D_\alpha(v-p)) = \\ p + D_\alpha(v-p) &= (E_2 - D_\alpha)p + D_\alpha v = (E_2 - D_\alpha)(E_2 - D_\alpha)^{-1}u + D_\alpha v \\ &= u + D_\alpha v = (\tau_u \circ \phi_{D_\alpha})(v) = \phi(v). \end{aligned}$$

zu (c) Sei ϕ eine orientierungserhaltende Bewegung des $\mathbb{R}^2$. Dann gibt es einen Vektor $u \in \mathbb{R}^2$ und eine Matrix $A \in O(2)$ mit $\det(A) = -1$, so dass $\phi = \tau_u \circ \phi_A$ gilt. Wieder untersuchen wir zunächst die Matrix A . Bezeichnen wir wie in Teil (b) die Einträge dieser Matrix mit a, b, c, d , dann ist das charakteristische Polynom von A gegeben durch

$$\begin{aligned}\phi_A &= (x-a)(x-d) - bc = x^2 - (a+d)x + ad - bc = \\ &= x^2 - (a+d)x + \det(A) = x^2 - (a+d)x - 1.\end{aligned}$$

Die Diskriminante dieses Polynoms ist $(a+d)^2 + 4 > 0$, was zeigt, dass zwei reelle Eigenwerte existieren. Das Produkt dieser beiden Eigenwerte ist $\det(A) = -1$. Bezeichnet $\lambda \in \mathbb{R}$ einen dieser Eigenwerte, und ist $0_{\mathbb{R}^2} \neq v \in \mathbb{R}^2$ ein zugehöriger Eigenvektor, dann gilt $\lambda^2 \langle v, v \rangle = \langle \lambda v, \lambda v \rangle = \langle Av, Av \rangle = \langle v, v \rangle$, wobei im letzten Schritt die Orthogonalität von A verwendet wurde. Es folgt $\lambda^2 = 1$, also $\lambda \in \{\pm 1\}$. Somit muss einer der Eigenwerte gleich 1 und der andere gleich -1 sein. Es sei $w_+ \in \mathbb{R}^2$ ein normierter Eigenvektor zum Eigenwert 1, und $w_- \in \mathbb{R}^2$ ein normierter Eigenvektor zum Eigenwert -1 . Die Gleichung $\langle w_+, w_- \rangle = \langle Aw_+, Aw_- \rangle = \langle w_+, -w_- \rangle = -\langle w_+, w_- \rangle$ zeigt dann noch, dass $\langle w_+, w_- \rangle = 0$ gilt. Es ist $\mathcal{B} = (w_+, w_-)$ also eine ON-Basis des $\mathbb{R}^2$.

Wir stellen nun den Translationsvektor u als Linearkombination von $\mathcal{B}$ dar, $u = \alpha v_+ + \beta v_-$ und zeigen, dass $\phi = s_{g, \alpha v_+}$ gilt, mit der affinen Geraden $g = \frac{1}{2}\beta v_- + \text{lin}(v_+)$. Im Fall $\alpha = 0$, $u \in \text{lin}(v_-)$ ist ϕ also eine Spiegelung, ansonsten eine Gleitspiegelung. Da v_- auf $\mathcal{L}(g) = \text{lin}(v_+)$ senkrecht steht, ist die Spiegelungsabbildung s_g gegeben durch $s_g(v) = v - 2\langle v - \frac{1}{2}\beta v_-, v_- \rangle v_-$. Sei $v \in \mathbb{R}^2$ beliebig vorgegeben, und seien $\gamma, \delta \in \mathbb{R}$ mit $v = \gamma v_+ + \delta v_-$. Tatsächlich gilt dann

$$\begin{aligned}s_{g, \alpha v_+}(v) &= (s_g \circ \tau_{\alpha v_+})(v) = s_g(v + \alpha v_+) = s_g((\alpha + \gamma)v_+ + \delta v_-) = \\ &= ((\alpha + \gamma)v_+ + \delta v_-) - 2\langle ((\alpha + \gamma)v_+ + \delta v_-) - \frac{1}{2}\beta v_-, v_- \rangle v_- = \\ &= (\alpha + \gamma)v_+ + \delta v_- - 2(\alpha + \gamma)\langle v_+, v_- \rangle v_- - 2(\delta - \frac{1}{2}\beta)\langle v_-, v_- \rangle v_- = \\ &= (\alpha + \gamma)v_+ + \delta v_- - 2(\delta - \frac{1}{2}\beta)v_- = (\alpha + \gamma)v_+ + (\beta - \delta)v_-\end{aligned}$$

und ebenso

$$\begin{aligned}\phi(v) &= (\tau_u \circ \phi_A)(v) = \tau_u(\phi_A(\gamma v_+ + \delta v_-)) = \tau_u(\gamma v_+ - \delta v_-) = \\ &= u + \gamma v_+ - \delta v_- = (\alpha v_+ + \beta v_-) + \gamma v_+ - \delta v_- = (\alpha + \gamma)v_+ + (\beta - \delta)v_-.\end{aligned}$$

Aufgabe 3

zu (a) Sei $\alpha = \angle(v_0, v_0 + w_0)$ und $\beta = \angle(v_0, w_0)$. Zu zeigen ist $2\alpha = \beta$. Weil die Kosinusfunktion das Intervall $[0, \pi]$ bijektiv auf $[-1, 1]$ abbilden, genügt es, die Gleichung $\cos(2\alpha) = \cos(\beta)$ zu überprüfen. Auf Grund des Additionstheorems des Kosinus gilt

$$\cos(2\alpha) = \cos(\alpha + \alpha) = \cos(\alpha)^2 - \sin(\alpha)^2 = \cos(\alpha)^2 - (1 - \cos(\alpha)^2) = 2\cos(\alpha)^2 - 1.$$

Außerdem gilt $\cos(\beta) = \langle v_0, w_0 \rangle$ und $\cos(\alpha) = \frac{\langle v_0, v_0 + w_0 \rangle}{\|v_0 + w_0\|}$. Insgesamt erhalten wir

$$\begin{aligned}\cos(2\alpha) &= 2\cos(\alpha)^2 - 1 = 2 \frac{\langle v_0, v_0 + w_0 \rangle^2}{\langle v_0 + w_0, v_0 + w_0 \rangle} - 1 = 2 \frac{(\langle v_0, v_0 \rangle + \langle v_0, w_0 \rangle)^2}{\langle v_0 + w_0, v_0 + w_0 \rangle} - 1 \\ &= 2 \frac{(1 + \langle v_0, w_0 \rangle)^2}{\langle v_0, v_0 \rangle + \langle w_0, w_0 \rangle + 2\langle v_0, w_0 \rangle} - 1 = 2 \frac{(1 + \langle v_0, w_0 \rangle)^2}{2 + 2\langle v_0, w_0 \rangle} - 1 \\ &= 1 + \langle v_0, w_0 \rangle - 1 = \langle v_0, w_0 \rangle = \cos(\beta).\end{aligned}$$

Der Beweis der Gleichung $\angle(w_0, v_0 + w_0) = \frac{1}{2}\angle(v_0, w_0)$ läuft vollkommen analog.

zu (b) Allgemein gilt: Ist (v, w) ein positiv orientiertes Paar von Vektoren im $\mathbb{R}^2$, also $\det(v, w) = v_1 w_2 - v_2 w_1 > 0$, dann sind auch die Paare $(v, \frac{1}{2}v + \frac{1}{2}w)$ und $(\frac{1}{2}v + \frac{1}{2}w, w)$ positiv orientiert, denn es gilt

$$\det(v, \frac{1}{2}v + \frac{1}{2}w) = \frac{1}{2}\det(v, v) + \frac{1}{2}\det(v, w) = \frac{1}{2}\det(v, w) > 0,$$

und ebenso erhält man $\det(\frac{1}{2}v + \frac{1}{2}w, w) > 0$. In den Voraussetzungen von Satz (15.22) wurde festgelegt, dass das Paar (v, w) positiv orientiert ist, also gilt dasselbe für das Paar $(\frac{1}{c}v, \frac{1}{b}w)$. Die Vektoren $\frac{1}{c}v$ und $\frac{1}{b}w$ sind normiert, denn nach Definition gilt $v = \|\overrightarrow{AB}\| = c$ und $w = \|\overrightarrow{AC}\| = b$. Nach Teil (a) ist $\frac{1}{c}v + \frac{1}{b}w$ also tatsächlich die Winkelhalbierende der beiden Geraden durch AB und AC .

In Satz (15.22) wurde auch gezeigt, dass die Paare $(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA}) = (w - v, -v)$ und $(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}) = (-w, v - w)$ positiv orientiert sind. Die Winkelhalbierende der Geraden durch BC und BA ist somit $v + \mathbb{R}(\frac{1}{a}(w - v) - \frac{1}{c}v)$, und die Winkelhalbierende der Geraden durch CA und CB ist $w + \mathbb{R}(\frac{1}{a}(v - w) - \frac{1}{b}w)$.

zu (c) Um den Schnitt der ersten beiden Winkelhalbierenden zu bestimmen, lösen wir die Gleichung

$$\lambda_1(\frac{1}{c}v + \frac{1}{b}w) = v + \lambda_2(\frac{1}{a}(w - v) - \frac{1}{c}v).$$

Fassen wir die Koeffizienten von v und w auf beiden Seiten jeweils zusammen, so erhalten wir $(\lambda_1 \frac{1}{c})v + (\lambda_1 \frac{1}{b})w = (1 - \lambda_2 \frac{1}{a} - \lambda_2 \frac{1}{c})v + (\lambda_2 \frac{1}{a})w$. Da das Paar (v, w) linear unabhängig ist, folgt $\lambda_1 \frac{1}{c} = 1 - \lambda_2 \frac{1}{a} - \lambda_2 \frac{1}{c}$ und $\lambda_1 \frac{1}{b} = \lambda_2 \frac{1}{a}$. Auflösen dieses linearen Gleichungssystems ergibt $\lambda_1 = \frac{bc}{a+b+c}$ und $\lambda_2 = \frac{ac}{a+b+c}$. Die beiden Winkelhalbierenden schneiden sich also im Punkt $p = \lambda_1(\frac{1}{c}v + \frac{1}{b}w) = \frac{b}{a+b+c}v + \frac{c}{a+b+c}w$. Um zu zeigen, dass dieser Punkt auch auf der dritten Winkelhalbierenden liegt, müssen wir überprüfen, dass ein $\lambda_3 \in \mathbb{R}$ mit $w + \lambda_3(\frac{1}{a}(v - w) - \frac{1}{b}w) = p$ existiert. Vergleich des Koeffizienten von v in der Gleichung

$$w + \lambda_3(\frac{1}{a}(v - w) - \frac{1}{b}w) = \frac{b}{a+b+c}v + \frac{c}{a+b+c}w$$

liefert $\lambda_3 = \frac{ab}{a+b+c}$, und Einsetzen zeigt, dass tatsächlich

$$w + \lambda_3(\frac{1}{a}(v - w) - \frac{1}{b}w) = w + \frac{ab}{a+b+c}(\frac{1}{a}(v - w) - \frac{1}{b}w) = \frac{b}{a+b+c}v + \frac{c}{a+b+c}w = p$$

erfüllt ist.

zu (d) Wir verwenden dieselben Bezeichnungen wie in Teil (a) und überprüfen, dass jeder Punkt auf der Winkelhalbierenden $p + \mathbb{R}(v_0 + w_0)$ von den beiden Geraden $p + \mathbb{R}v_0$ und $p + \mathbb{R}w_0$ denselben Abstand hat. Sei $q = p + \alpha(v_0 + w_0)$ ein beliebiger Punkt auf der Winkelhalbierenden, mit $\alpha \in \mathbb{R}$. Die Orthogonalprojektion von $q - p$ auf $\text{lin}(v_0)$ ist gegeben durch λv_0 mit $\lambda = \langle \alpha(v_0 + w_0), v_0 \rangle = \alpha + \alpha \langle v_0, w_0 \rangle$. Das Quadrat des Abstands von q zur Geraden $p + \mathbb{R}v_0$ ist somit gegeben durch

$$\begin{aligned} \|q - (p + \lambda v_0)\|^2 &= \|\alpha(v_0 + w_0) - \lambda v_0\|^2 = \|(\alpha - \lambda)v_0 + \alpha w_0\|^2 = \\ &= \|\alpha w_0 - \alpha \langle v_0, w_0 \rangle v_0\|^2 = \langle \alpha w_0 - \alpha \langle v_0, w_0 \rangle v_0, \alpha w_0 - \alpha \langle v_0, w_0 \rangle v_0 \rangle = \\ &= \alpha^2 \langle w_0, w_0 \rangle + \alpha^2 \langle v_0, w_0 \rangle^2 \langle v_0, v_0 \rangle - 2\alpha^2 \langle v_0, w_0 \rangle^2 = \alpha^2 + \alpha^2 \langle v_0, w_0 \rangle^2 - 2\alpha^2 \langle v_0, w_0 \rangle^2 \\ &= \alpha^2 (1 - \langle v_0, w_0 \rangle^2). \end{aligned}$$

Eine analoge Rechnung zeigt, dass dies auch der Abstand von q von der Geraden $p + \mathbb{R}w_0$ ist. Der Schnittpunkt p der drei Winkelhalbierenden hat somit von allen drei Dreiecksseiten denselben Abstand r . Dies zeigt, dass der Kreis vom Radius r um p alle drei Dreiecksseiten berührt.