Analysis mehrerer Variablen

— Lösung Blatt 1 —

(Tutoriumsblatt)

Aufgabe 0

zu (a) Sei $n \in \mathbb{N}$ und K ein Körper. Eine Matrix $A \in \mathcal{M}_{n,K}$ wird als *nilpotent* bezeichnet, wenn ein $p \in \mathbb{N}$ mit $A^p = 0$ existiert.

zu (b) Hier gibt es natürlich viele Möglichkeiten. Beispielsweise ist der Endomorphismus $\phi_A : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $v \mapsto Av$ mit der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

nilpotent, denn einerseits gilt $\phi_A^2 = 0$, da für alle $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ jeweils

$$\phi_A^2 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

ist, andererseits aber $\phi_A \neq 0$ wegen

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Ein anderer Beispiel ist die Ableitungsabbildung $\psi : V \rightarrow V$, $f = ax^2 + bx + c \mapsto f' = 2ax + b$ auf dem Vektorraum $V \subseteq \mathbb{R}[x]$ der Polynome vom Grad ≤ 2 . Hier ist leicht zu sehen, dass $\psi \neq 0$, aber $\psi^3 = 0$ ist.

zu (c) Der Hauptraum von ϕ zum Eigenwert $\lambda \in K$ ist definiert durch $\text{Hau}(\phi, \lambda) = \bigcup_{k=1}^{\infty} \ker((\phi - \lambda \cdot \text{id}_V)^k)$. Bezeichnet a die algebraische Vielfachheit des Eigenwerts λ von ϕ , oder die Vielfachheit von λ als Nullstelle von μ_ϕ , dann gilt $\text{Hau}(\phi, \lambda) = \ker((\phi - \lambda \cdot \text{id}_V)^a)$. Dies zeigt, dass $\text{Hau}(\phi, \lambda)$ ein Untervektorraum von V ist. Um $\text{Hau}(\phi, \lambda)$ auszurechnen, benötigt man zunächst eine geordnete Basis $\mathcal{B}$ von V . Man kann dann mit Hilfe der Matrix $A = \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(\phi)$ zunächst einmal χ_A ausrechnen. Anschließend bestimmt man die Eigenwerte von A und deren algebraische Vielfachheiten. Ist a die algebraische Vielfachheit von $\lambda \in K$, dann kann man mit dem Gauß-Algorithmus eine Basis von $\text{Hau}(A, \lambda) = \ker((A - \lambda E_n)^a)$, wobei $n = \dim V$ ist. Dies sind die Koordinatenvektoren einer Basis von $\text{Hau}(\phi, \lambda)$ bezüglich $\mathcal{B}$.

zu (d) Diese Eigenschaft hat zum Beispiel die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

zu (e) Eine Jordankette der Länge 3 ist gegeben durch (e_1, e_2, e_3) , wie man an den drei ersten Spalten der Matrix A erkennt, denn es gilt $\phi_A(e_3) = e_2$, $\phi_A(e_2) = e_1$ und $\phi(e_1) = 0_{\mathbb{R}^6}$. Ebenso sieht man, dass (e_5, e_6) eine Jordankette der Länge 2 ist, und (e_4) ist eine Jordankette der Länge 1.

Aufgabe 1

zu (a) Nehmen wir an, dass λ ein von null verschiedener Eigenwert von ϕ ist, und sei $0_V \neq v \in V$ ein zugehöriger Eigenvektor. Dann gilt $\phi(v) = \lambda v$, $\phi^2(v) = \phi(\lambda v) = \lambda^2 v$ und allgemein $\phi^p(v) = \lambda^p v$. Dies zeigt, dass $\phi^p \neq 0_{\text{End}_K(V)}$ für alle $p \in \mathbb{N}$ gilt. Aber dies widerspricht der Voraussetzung, dass ϕ nilpotent ist.

zu (b) „ $\Rightarrow$ “ Angenommen, es gilt $n = \dim V \geq 2$. Sei $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$ eine Basis von V und $\phi : V \rightarrow V$ der eindeutig bestimmte Endomorphismus mit $\phi(v_1) = 0_V$, $\phi(v_2) = v_1$ und $\phi(v_k) = 0_V$ für $3 \leq k \leq n$. Dann ist $\phi \neq 0$, andererseits gilt $\phi^2(v_k) = 0_V$ für $k = 1$ und $3 \leq k \leq n$ und ebenso $\phi^2(v_2) = \phi(v_1) = 0_V$. Daraus folgt $\phi = 0$, weil jeder Endomorphismus durch die Bilder der Basiselemente eindeutig festgelegt ist. Es gibt also einen nilpotenten Endomorphismus von V ungleich null.

„ $\Leftarrow$ “ Setzen wir $\dim V = 1$ voraus, und sei $v \in V \setminus \{0_V\}$. Dann ist $\{v\}$ eine Basis von V . Ist nun $\phi \in \text{End}_K(V)$ nilpotent, dann gilt $\phi^p = 0$ für ein $p \in \mathbb{N}$. Weil $\{v\}$ eine Basis von V ist, existiert ein $\lambda \in K$ mit $\phi(v) = \lambda v$. Es folgt $\lambda^p v = \phi^p(v) = 0_V$ und somit $\lambda^p = 0$. Daraus wiederum folgt $\lambda = 0$ und $\phi = 0$.

zu (c) Die folgende Matrix besitzt die gewünschte Eigenschaft:

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

Diese Matrix befindet sich in Jordanscher Normalform, und es gibt genau einen Jordanblock zum Eigenwert 5. Daraus folgt $\dim \text{Eig}(A, 5) = \mu_g(A, 5) = 1$. Wegen $(A - 5E_2)^2 = 0$ ist $\ker((A - 5E_2)^2) = \mathbb{R}^2$, und aus $\ker((A - 5E_2)^2) \subseteq \text{Hau}(A, 5) \subseteq \mathbb{R}^2$ folgt $\text{Hau}(A, 5) = \mathbb{R}^2$. Es gilt also $\dim \text{Hau}(A, 5) = \dim \mathbb{R}^2 = 2$.

zu (d) Nach Satz (14.15) (iii) ist $\dim \text{Hau}(A, 5) = 1$ die Summe der Größen aller Jordanblöcke zum Eigenwert 5. Insbesondere gibt es also einen Jordanblock zum Eigenwert 5. Dies zeigt, dass $\mu_g(A, 5) \geq 1$ gilt, es ist 5 also ein Eigenwert von A . Aus $0 \subsetneq \text{Eig}(A, 5) \subseteq \text{Hau}(A, 5)$ und $\dim \text{Hau}(A, 5) = 1$ wiederum folgt $\text{Eig}(A, 5) = \text{Hau}(A, 5)$.

Aufgabe 2

zu (a) Auf Grund der Voraussetzung $\chi_A = (x - 2)^3(x - 5)^4$ und wegen $\text{grad}(\chi_A) = 7$ muss A eine 7×7 -Matrix sein. Auf Grund der Vielfachheit der beiden Nullstellen muss $\mu_a(A, 2) = 3$ und $\mu_a(A, 5) = 4$ gelten. Die Größen der Jordankästchen zum Eigenwert 2 müssen sich nach Satz (14.15) also zu 3, die Größen der Jordankästchen zum Eigenwert 5 zu 4 addieren.

Ist nun $\mu_A = (x - 2)(x - 5)$, dann ist 1 jeweils die Größe des größten Jordanblocks zum Eigenwert 2 bzw. 5. Dies wird erfüllt durch die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

Zum Minimalpolynom $\mu_A = (x - 2)^2(x - 5)^2$ findet man entsprechend die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

und zum Minimalpolynom $\mu_A = (x - 2)^3(x - 5)^3$ die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

zu (b) Es gibt keine Matrix A mit $\chi_A = (x - 2)^3(x - 5)^4$ und $\mu_A = (x - 2)^4(x - 5)^3$, weil laut Vorlesung das Minimalpolynom μ_A stets ein Teiler des charakteristischen Polynoms χ_A ist. Ebenso gibt es auch keine Matrix mit $\chi_A = (x - 2)^3(x - 5)^4$ und $\mu_A = (x - 2)^2$. Denn aus der ersten Gleichung folgt, dass 5 eine Nullstelle von χ_A und somit ein Eigenwert von A ist. Aber nach Prop. (14.11) sind die Eigenwerte auch die Nullstellen von μ_A . Somit müsste 5 eine Nullstelle von $\mu_A = (x - 2)^2$ sein, was aber nicht der Fall ist.

Aufgabe 3

zu (a) Laut Prop. (14.18) gilt $\text{Hau}(A, 3) = \ker((A - 3E_3)^2)$ und $\text{Hau}(A, 7) = \ker(A - 7E_3)$. Es ist

$$(A - 3E_3)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 32 & 64 & 48 \\ -32 & -64 & -48 \end{pmatrix}$$

und

$$A - 7E_3 = \begin{pmatrix} -6 & -4 & -4 \\ 9 & 14 & 14 \\ -8 & -16 & -16 \end{pmatrix}.$$

Der Gauß-Algorithmus liefert die zweielementige Basis $\{(3, 0, -2), (0, 3, -4)\}$ von $\text{Hau}(A, 3)$ und ebenso die einelementige Basis $\{(0, 1, -1)\}$ von $\text{Hau}(A, 7)$.

zu (b) Wir berechnen mit dem Gauß-Algorithmus die Dimension des Kerns von $B = A - 3E_3$.

$$\begin{pmatrix} -2 & -4 & -4 \\ 9 & 18 & 14 \\ -8 & -16 & -12 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} -2 & -4 & -4 \\ 1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 0 & -8 \\ 1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & -8 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Die letzte Matrix zeigt, dass $\text{rg}(B) = 2$ und somit (nach dem Dimensionssatz für lineare Abbildungen) $\mu_g(A, 3) = \dim \text{Eig}(A, 3) = \dim \ker(B) = 3 - \text{rg}(B) = 3 - 2 = 1$ gilt. Es gibt also genau einen Jordanblock zum Eigenwert 3. Wegen $\dim \text{Hau}(A, 7) = 1$ gibt es genau einen Jordanblock zum Eigenwert 7, von Größe 1. Weil sich die Größen der Jordanblöcke insgesamt zu 3 addieren müssen, ist der einzige Jordanblock zum Eigenwert 3 von Größe 2. Dem Ansatz aus der Vorlesung folgend, wählen wir den Vektor $v = (3, 0, -2)$ in der Basis von $\text{Hau}(A, 3)$ zufällig und tragen die Vektoren (Bv, v, w) als Spalten in einer Matrix T ein. Dabei ist $Bv = (2, -1, 0)$, und $w = (0, 1, -1)$ bezeichnet den Basisvektor vom $\text{Eig}(A, 7) = \text{Hau}(A, 7)$. Wir erhalten

$$T = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Man kann nun überprüfen, dass T invertierbar ist, mit der Inversen

$$T^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 3 \\ -1 & -2 & -2 \\ 2 & 4 & 3 \end{pmatrix},$$

und dass

$$T^{-1}AT = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix} \quad \text{gilt.}$$