

Aufgabe 1 K Körper, $n \in \mathbb{N}$, V K -Vektorraum
mit $n = \dim V$

(a) zeige. Zwei ähnliche Matrizen A, B haben
dieselben Minimalpolynome, d.h. $\mu_A = \mu_B$.

Erinnerung. Min-pol von $A \in M_{n,K}$ = end. best. norm.
Polynom $f \in K[x]$ mit $f(A) = 0_{M_{n,K}}$

A, B ähnlich $\Rightarrow \exists T \in GL_n(K)$ mit $B = TAT^{-1}$

$$(f = \sum_{k=0}^n a_k x^k \Rightarrow f(A) = a_n A^n + \dots + a_1 A + a_0 E_n$$

$$f(A) = 0 \iff f(B) = 0 \quad \forall f \in K[x]$$

Es genügt z.zg. $f(A) = 0 \iff f(B) = 0$

Ist dann f das end. best. normierte Pol. minimalen
Grades mit $f(A) = 0$, dann ist f wg auch das end. best.

$$\begin{aligned} T(A^n + \dots + a_1 A + a_0 E_n)T^{-1} &= T \cdot 0 \cdot T^{-1} = 0 \Rightarrow B^n + \dots + a_1 B + a_0 E_n = 0 \\ T(A^n + \dots + a_1 A + a_0 E_n)T^{-1} &= T \cdot 0 \cdot T^{-1} = 0 \Rightarrow B^n + \dots + a_1 B + a_0 E_n = 0 \\ T(A^n + \dots + a_1 A + a_0 E_n)T^{-1} &= T \cdot 0 \cdot T^{-1} = 0 \Rightarrow B^n + \dots + a_1 B + a_0 E_n = 0 \end{aligned}$$

normierte Pol. mit Gr. n mit $f(B) = 0$

Beh. $\forall m \in \mathbb{N}_0: (TAT^{-1})^m = TA^m T^{-1}$

vollst. Ind.: $m=0: (TAT^{-1})^0 = E_n = TT^{-1} = TE_n T^{-1} = TA^0 T^{-1}$

$m \mapsto m+1: (TAT^{-1})^{m+1} = (TAT^{-1})^m (TAT^{-1}) \stackrel{\text{Ind. V.}}{=} TA^m T^{-1} T A T^{-1} = TA^m E_n A T^{-1} = TA^{m+1} T^{-1} (\Rightarrow \text{Beh.})$

Bew. von (*): Sei $f = \sum_{k=0}^n a_k x^k, n \in \mathbb{N}_0, a_0, \dots, a_n \in K$

$f(A) = 0 \Rightarrow a_n A^n + \dots + a_1 A + a_0 E_n = 0 \Rightarrow$

$T(A^n + \dots + a_1 A + a_0 E_n)T^{-1} = T \cdot 0 \cdot T^{-1} = 0 \Rightarrow \text{Beh.}$

$TA^n T^{-1} + \dots + a_1 T A T^{-1} + a_0 T E_n T^{-1} = 0 \Rightarrow$
 $(TAT^{-1})^n + \dots + a_1 (TAT^{-1}) + a_0 E_n = 0 \Rightarrow f(B) = 0$

Damit ist „ $f(A) = 0 \Rightarrow f(B) = 0$ “ gezeigt. Die
Rückrichtung erhält man, indem man T durch T^{-1}
ersetzt (denn $A = T^{-1}BT$).

(b) Sei $\phi \in \text{End}_K(V)$, $\lambda \in K$, $\text{Hau}(\phi, \lambda) \neq \{0_V\}$
zeige: $\text{Hau}(\phi, \lambda)$ enthält mind einen Eigenvektor von ϕ
zum Eigenwert λ

Erinnerung: $\text{Hau}(\phi, \lambda) = \bigcup_{m=0}^{\infty} \ker((\phi - \lambda \text{id}_V)^m)$
 $\stackrel{(14.18)}{=} \ker((\phi - \lambda \text{id}_V)^e)$, wobei $e = \text{Vielfachheit}$
von λ als Nullstelle von μ_ϕ (oder χ_ϕ)

Sei $\psi = (\phi - \lambda \text{id}_V)|_{\text{Hau}(\phi, \lambda)}$. Wegen (14.18) ist
 ψ nilpotent, es gilt $\psi^e = 0$. $\Rightarrow$ Min-pol μ_ψ
ist Teiler $X^e \Rightarrow 0$ ist Nullstelle von $\mu_\psi \Rightarrow$

0 ist Eigenwert von $\psi \Rightarrow \exists v \in \text{Kern}(\psi) \setminus \{0, v\}$
 mit $\psi(v) = 0 \Rightarrow (\phi - \lambda \text{id}_V)(v) = 0 \Rightarrow$
 $\phi(v) = \lambda \text{id}_V(v) = \lambda v \Rightarrow v$ Eigenvektor von ϕ zum
 Eigenwert λ

(c) $\lambda \in K$ zeige: Für jedes $k \in \{1, \dots, n\}$ gibt es einen
 End. ϕ von V mit $\chi_\phi = (x - \lambda)^n$, $m_\phi = (x - \lambda)^k$, $\mu_\phi(\phi, \lambda)$
 $= n + 1 - k$

Sei J die Jordannormale bestehend aus Jordanblöcken
 $J_1, \dots, J_{n+1-k}$, wobei λ der Eigenwert aller Jordanblöcke ist.
 J_n die Größe k und $J_2, \dots, J_{n+1-k}$ die Größe 1 haben. Sei B
 eine geordnete Basis von V und $\phi = L_B(J)$. Da λ einziger Eigenwert
 von ϕ ist (einziger Wert auf der Hauptdiag. der Normalmatrix J) gilt

$\chi_\phi = (x - \lambda)^n$ k Größe des größten Jordanblockes $\Rightarrow$
 $\mu_\phi = (x - \lambda)^k$ insgesamt $n+1-k$ Jordanblöcke zum
 Eigenwert $\lambda \Rightarrow \mu_\phi(\phi, \lambda) = n+1-k$

(d) Gilt „0 einziger Eigenwert von $\phi \in \text{End}_k(V)$
 $\Rightarrow \phi$ nilpotent“? Im Fall $k = \mathbb{C}$?

Für $k = \mathbb{R}$ ist die Aussage falsch. Betrachte
 $\phi_A \in \text{End}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^3)$ mit $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Es ist

$$\chi_{\phi_A} = \chi_A = (x^2 + 1) \cdot x$$

Einzige Nullstelle von χ_{ϕ_A} ist 0. $\Rightarrow$ 0 ist einziger
 Eigenwert von ϕ_A . Aber A (und somit auch ϕ_A) ist
 nicht nilpotent, denn $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = E_4, \quad \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^5 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Für alle $m \in \mathbb{N}$ ist A^m somit eine der Matrizen

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow A^m \neq 0 \quad \forall m \in \mathbb{N} \Rightarrow A$ nicht nilpotent

Für $K = \mathbb{C}$ ist die Aussage richtig. Ist nämlich 0 der einzige Eigenwert von ϕ , dann ist 0 die einzige Nullstelle von χ_ϕ .
Da χ_ϕ über $\mathbb{C}$ in Linearfaktoren zerfällt, $\chi_\phi = (x - \lambda_1) \cdots (x - \lambda_n)$ mit $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{C}$, muss $\lambda_k = 0$ für $1 \leq k \leq n$, also $\chi_\phi = x^n$ gelten.

Satz von Cayley-Hamilton $\Rightarrow \phi^n = 0 \Rightarrow \phi$ ist nilpotent $\square$

Aufgabe 2

geg. $A \in M_{6,\mathbb{R}}$, 1 Eigenwert mit

$m_A(A, 1) = 6$, $M_A(A, 1) = 3$ Es gelte $A = E_6 + N$
mit $N \in M_{6,\mathbb{R}}$, $N^3 = 0$, $N^2 \neq 0$ Geben Sie eine JNF
von A an.

$m_A(A, 1) = 6 \Rightarrow$ Die Summe der Größen aller Jordanblöcke
in einer JNF J von A ist gleich 6 $J \in M_{6,\mathbb{R}} \rightarrow 1$ ist

einzigster Eigenwert der auftretenden Jordanblöcke

$M_A(A, 1) = 3 \Rightarrow J$ enthält genau 3 Jordanblöcke

$N^3 = 0 \Rightarrow (A - E_6)^3 = 0 \Rightarrow A$ ist Nullstelle

von $p = (x-1)^3 \Rightarrow p$ ist Vielfaches von $M_J \Rightarrow$

$M_J = (x-1)^k$ mit $1 \leq k \leq 3$ $(A - E_6)^2 = N^2 \neq 0 \Rightarrow$

M_J ist kein Teiler von $(x-1)^2 = 0 \Rightarrow M_J = (x-1)^3$

- $\Rightarrow$ Die Vielfachheit von 1 als Nullst. des Min.-pol ist 3
- $\Rightarrow$ Die Größe des größten Jordanblocks ist 3
- $\Rightarrow$ Es gibt einen Jordanblock der Größe 3 und zwei weitere Jordanblöcke. Diese müssen (wegen $J \in M_{12}$) die Größen 1 und 2 haben. Also ist

$$J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 3

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & -2 & 4 \\ -7 & 6 & -4 & 7 \\ 2 & -1 & 3 & -2 \\ 3 & -2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\chi_A = (x-1)^2(x-2)^2$$

gesucht: $T \in GL_4(\mathbb{R})$, so dass $J = T^{-1}AT$ eine Matrix in JNF ist

1. Schritt: Bestimme die Dimensionen von $\ker(A - \lambda E_4)^j$ für $j=1,2$ und die beiden Eigenwerte $\lambda \in \{1,2\}$

$$\lambda = 1$$

$$A - E = \begin{pmatrix} -3 & 2 & -2 & 4 \\ -7 & 5 & -4 & 7 \\ 2 & -1 & 2 & -2 \\ 3 & -2 & 2 & -2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 3 & -2 & 2 & -2 \\ -7 & 5 & -4 & 7 \\ 2 & -1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -7 & 5 & -4 & 7 \\ 2 & -1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -4 & 7 \\ 0 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} x_1 = -2x_3 \\ x_2 = -2x_3 \\ x_4 = 0 \end{matrix}$$

$$\Rightarrow \ker(A-E) = \left\{ \begin{pmatrix} -2x_3 \\ -2x_3 \\ x_3 \\ 0 \end{pmatrix} \mid x_3 \in \mathbb{R} \right\} = \text{lin} \{ (-2, -2, 1, 0) \}$$

$$(A-E)^2 = \begin{pmatrix} -3 & 2 & -2 & 4 \\ -7 & 5 & -4 & 7 \\ 2 & -1 & 2 & -2 \\ 3 & -2 & 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & 2 & -2 & 4 \\ -7 & 5 & -4 & 7 \\ 2 & -1 & 2 & -2 \\ 3 & -2 & 2 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 2 & -2 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & -2 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 3 & -2 & 2 & -2 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} x_1 = -2x_3 \\ x_2 = -2x_3 - x_4 \end{matrix}$$

$$\Rightarrow \ker(A-E)^2 = \text{lin} \{ (-2, -2, 1, 0), (0, -1, 0, 1) \}$$

$$\Rightarrow d_1 = \dim \ker(A-E)^1 = 1 \quad d_0 = 0$$

$$d_2 = \dim \ker(A-E)^2 = 2 \quad d_k = 2 \quad \forall k \geq 2$$

$\Rightarrow$ Anzahl Jordanblöcke der Größe 2

$$a_2 = 2d_2 - d_1 - d_3 = 2 \cdot 2 - 1 - 2 = 1$$

$\Rightarrow$ Die JNF enthält genau einen Jordanblock der Größe 2 zum Eigenwert 1

Ebenso findet man $\ker(A-2E) = \text{lin} \{ (1, 0, 0, 1), (0, 1, 1, 0) \}$

$\ker(A-2E) = \text{Eig}(A, 2) \Rightarrow$ Zwei Jordanblöcke der Größe 1 zum Eigenwert 2 $\Rightarrow$ Die JNF von A ist (bis auf Reihenfolge der Jordanblöcke)

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = J$$

Bestimmung der Transformationsmatrix:

Eigenwert 1: Wähle den Erzeuger $(0, -1, 0, 1)$ von

$$\ker(A - E)^2 = \begin{pmatrix} -3 & 2 & -2 & 4 \\ -7 & 5 & -4 & 7 \\ 2 & -1 & 2 & -2 \\ 3 & -2 & 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Eigenwert 2: Wähle die beiden Eigenvektoren.

$$\Rightarrow T = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad ! \Rightarrow T^{-1}AT = J$$