Freitag, 4. Februar 2022

Analysis mehrerer Variablen

— Blatt 14 —

(Tutoriumsblatt)

Aufgabe 0 *(Vorbereitung auf das Tutorium)*

(a) Bestimmen Sie Unter- und Obersumme der Funktion $f : [0,2] \times [0,2] \to \mathbb{R}$ gegeben durch $f(x,y) = (x^2 + y^2 + 1)^{-1}$ bezüglich der Zerlegung $\mathcal{Z} = (\{1\}, \{1\})$.

(b) Warum ist es sinnvoll, bei der Definition von Unter- und Oberintegral nur beschränkte Funktionen zu betrachten?

(c) Richtig oder falsch: Ist $f : Q \to \mathbb{R}$ eine Funktion mit $f(x) \geq 0$ für alle $x \in Q$, dann sind alle Unter- und Obersummen von f ebenfalls nicht negativ, also größer gleich Null.

(d) Was besagen die Substitutionsregel und die Regel zur partiellen Integration aus der Analysis einer Variablen?

Aufgabe 1

Sei $Q = [a,b] \times [c,d] \subseteq \mathbb{R}^2$ ein kompakter Quader und $f : Q \to \mathbb{R}$ eine beschränkte Funktion mit $f(x) = 0$ für alle $x \in \,]a,b[\, \times \,]c,d[$. Beweisen Sie, dass f Riemann-integrierbar und dass das Riemann-Integral von f gleich Null ist.

Aufgabe 2

Sei $f : [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{R}$ gegeben durch $f(x,y) = 2x + y$. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ sei $\mathcal{Z}^{(n)} = (\mathcal{Z}_1^{(n)}, \mathcal{Z}_2^{(n)})$ die äquidistante Unterteilung definiert durch $\mathcal{Z}_1^{(n)} = \mathcal{Z}_2^{(n)} = \{\frac{k}{n} \mid 1 \leq k \leq n-1\}$. Berechnen Sie die Unter- und Obersumme $\mathcal{S}_f^-(\mathcal{Z}^{(n)})$ und $\mathcal{S}_f^+(\mathcal{Z}^{(n)})$ für jedes $n \in \mathbb{N}$. Begründen Sie damit, dass f Riemann-integrierbar ist, und bestimmen Sie das Riemann-Integral.

Aufgabe 3

(a) Berechnen Sie folgende Integrale mit Hilfe der Substitutionsregel.

$$\text{(i)} \int_1^2 \sqrt{2x+5}\,dx \qquad \text{(ii)} \int_a^b \frac{x^2+3x+5}{x^2+2}\,dx \quad (a,b \in \mathbb{R}) \qquad \text{(iii)} \int_0^{\pi/4} \tan(x)\,dx.$$

(b) Berechnen Sie folgende Integrale mittels partieller Integration.

$$\text{(i)} \int_0^1 \arctan(x)\,dx \qquad \text{(ii)} \int_a^b \cos(x)^2\,dx \quad (a,b \in \mathbb{R}).$$

Dieses Blatt wird vom 7. bis zum 11. Februar 2022 im Tutorium bearbeitet.