Freitag, 28. Januar 2022

Analysis mehrerer Variablen

— Blatt 13 —

(Tutoriumsblatt)

Aufgabe 0 *(Vorbereitung auf das Tutorium)*

(a) Zeigen Sie, dass jede stetig differenzierbare Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jeweils durch eine Funktion $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ implizit definiert werden kann.

(b) Überprüfen Sie, ob die von Ihnen angegebene Funktion F die Voraussetzungen des Satzes über implizite Funktionen erfüllt.

(c) Wie lautet das notwendige Kriterium für lokale Extrema der Funktion $f(x, y) = x^2$ auf der Geraden $x + y = -1$? Für welche Punkte ist es erfüllt?

(d) Welche Unter- und Obersumme hat die Funktion $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x$ bezüglich der Zerlegungen $\mathcal{Z} = \{\frac{1}{2}\}$ bzw. $\mathcal{Z} = \varnothing$?

Aufgabe 1

Wir betrachten das Gleichungssystem in vier Unbekannten gegeben durch

$$\begin{aligned} u + \cos(uv) - vx &= 1 \\ \sin(u) - y - v &= 0. \end{aligned}$$

(a) Beweisen Sie, dass dieses System in einer Umgebung des Punktes $(0, -1, 0, 1)$ lokal nach u und v aufgelöst werden kann. Das bedeutet: Es gibt offene Umgebungen $U' \subseteq \mathbb{R}^2$ von $(0, -1)$ und $U'' \subseteq \mathbb{R}^2$ von $(0, 1)$ und stetig differenzierbare Abbildungen $g, h : U' \to \mathbb{R}$, so dass für alle $(x, y, u, v) \in U' \times U''$ genau dann $u = g(x, y)$ und $v = h(x, y)$ gilt, wenn (x, y, u, v) das Gleichungsystem erfüllt.

(b) Berechnen Sie die partiellen Ableitungen $\partial_1 g(0, -1)$, $\partial_2 g(0, -1)$, $\partial_1 h(0, -1)$ und $\partial_2 h(0, -1)$.

Aufgabe 2

Sei $E \subseteq \mathbb{R}^2$ die Ellipse gegeben durch $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + xy + y^2 = 1\}$.

(a) Weisen Sie nach, dass es sich bei E um eine 1-dimensionale Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^2$ handelt.

(b) Bestimmen Sie mit Hilfe von Satz (14.2) alle Punkte auf E, die vom Koordinatenursprung $(0, 0)$ maximalen Abstand haben. Dabei darf ohne Beweis verwendet werden, dass auf E genau zwei solche Punkte existieren.

Aufgabe 3

Sei $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{falls } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{falls } x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$$

(a) Zeigen Sie, dass für jede Zerlegung $\mathcal{Z}$ von $[0, 1]$ jeweils $\mathcal{S}_f^-(\mathcal{Z}) \leq 0$ und $\mathcal{S}_f^+(\mathcal{Z}) \geq \frac{1}{2}$ gilt.

(b) Entscheiden Sie (mit Begründung), ob f Riemann-integrierbar ist.

Dieses Blatt wird vom 31. Januar bis zum 4. Februar 2022 im Tutorium bearbeitet.

Analysis mehrerer Variablen

— **Blatt 13** —

(Globalübungsblatt)

Aufgabe 1 (4+6 Punkte)

(a) Beweisen Sie, dass die Gleichung $e^{\sin(xy)} + x^2 - 2y - 1 = 0$ in einer Umgebung von $(0,0)$ nach y aufgelöst werden kann. Das bedeutet: Es gibt offene Intervalle $I', I'' \subseteq \mathbb{R}$ mit $0 \in I$, $0 \in I''$ und eine stetig differenzierbare Funktion $g : I' \to \mathbb{R}$, so dass für alle $(x,y) \in I' \times I''$ genau dann $y = g(x)$ gilt, wenn (x,y) das Gleichungssystem erfüllt.

(b) Berechnen Sie $g'(0)$ und $g''(0)$.

Aufgabe 2 (6+2+2 Punkte)

Sei $f : [0,2] \times [0,1] \to \mathbb{R}$ gegeben durch $f(x,y) = x^2 y$. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ sei die Unterteilung $\mathcal{Z}^{(n)} = (\mathcal{Z}_1^{(n)}, \mathcal{Z}_2^{(n)})$ definiert durch

$$\mathcal{Z}_1^{(n)} = \{\tfrac{2k}{n} \mid 1 \le k \le n-1\} \qquad \text{und} \qquad \mathcal{Z}_2^{(n)} = \{\tfrac{k}{n} \mid 1 \le k \le n-1\}.$$

(a) Berechnen Sie die Unter- und Obersumme $\mathcal{S}_f^-(\mathcal{Z}^{(n)})$ und $\mathcal{S}_f^+(\mathcal{Z}^{(n)})$ für jedes $n \in \mathbb{N}$.

(b) Begründen Sie mit dem Ergebnis aus Teil (a), dass f Riemann-integrierbar ist, und bestimmen Sie das Riemann-Integral.

(c) Überprüfen Sie Ihr Ergebnis mit dem Satz von Fubini.

Hinweis: In Teil (a) verwenden Sie $\sum_{k=1}^n k = \frac{1}{2}n(n+1)$ und $\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$.

Aufgabe 3 (4+6 Punkte)

Sei $E \subseteq \mathbb{R}^3$ die affine Ebene gegeben durch $E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x + 2y + z = 10\}$ und $S^2 \subseteq \mathbb{R}^3$ die 2-Sphäre gegeben durch $S^2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$.

(a) Sei $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ gegeben durch $p \mapsto d(p,E)^2$, wobei $d(p,E)$ für jedes $p \in \mathbb{R}^3$ den Abstand zwischen p und E bezeichnet. Geben Sie $f(p)$ für jeden Punkt $p = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ explizit an. Dabei darf ohne Beweis verwendet werden, dass für alle $p \in \mathbb{R}^3$ und $q \in E$ genau dann $d(p,E) = \|q - p\|_2$ erfüllt ist, wenn $q - p$ ein skalares Vielfaches des *Einheitsnormalenvektors* $n = \frac{1}{3}(2,2,1)$ der Ebene ist.

(b) Bestimmen Sie mit Hilfe von Satz (14.2) die Punkte $p_-, p_+ \in S^2$, die zu E minimalen bzw. maximalen Abstand haben. Dabei darf die Eindeutigkeit und Existenz dieser Punkte vorausgesetzt werden.

Abgabe: Freitag, 11. Februar 2022, 10:15 Uhr
Verspätete Abgaben können aus organisatorischen Gründen leider nicht nachträglich angenommen werden. Bitte geben Sie auf jeder Abgabe die Nummer Ihrer Übungsgruppe an.