Analysis mehrerer Variablen

— Blatt 12 —

(Tutoriumsblatt)

Aufgabe 0 *(Vorbereitung auf das Tutorium)*

(a) Geben Sie die Formel für das n-te mehrdimensionale Taylorpolynom $\tau_p(f,a)(x)$ einer Funktion $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ an einer Stelle $a \in \mathbb{R}^m$ an, zunächst für beliebiges n, anschließend für die Spezialfälle $n = 1, 2, 3$.

(b) Sei $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ eine dreimal differenzierbare Funktion, $a \in \mathbb{R}^3$, und seien $e_1, e_2, e_3 \in \mathbb{R}^3$ die Einheitsvektoren. Wie berechnet man $f'''(a)(e_1, e_3, e_3)$?

(c) Seien nun zunätzlich $u, v, v', w \in \mathbb{R}^3$ beliebige Vektoren. Begründen Sie die Gleichung $f'''(1,1,2)(2u, 3v + v', 4w) = 24f'''(1,1,2)(u, v, w) + 8f'''(1,1,2)(u, v', w)$.

(d) Begründen Sie, warum das hinreichende Kriterium für lokale Maxima, das wir in der Vorlesung besprochen haben, eine Verallgemeinerung des Kriteriums aus dem ersten Semester (und der Schulmathematik) ist.

(e) Formulieren Sie den Satz über die lokale Umkehrbarkeit im Eindimensionalen. Verwenden Sie dabei ausschließlich Begriffe, die schon im ersten Semester bekannt waren.

Aufgabe 1

Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gegeben durch $f(x, y) = (y + 1)e^{x+y}$.

(a) Bestimmen Sie das erste und das zweite Taylorpolynom von f an der Stelle $(1, 2)$.

(b) Berechnen Sie $f'''(1, 2)((3, 4), (5, 6), (7, 8))$.

Aufgabe 2

Bestimmen Sie alle lokalen Extrema der folgenden beiden Funktionen und geben Sie jeweils an, ob es sich um Maxima oder Minima handelt.

(a) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto x^3 + y^3 - 3xy$

(b) $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto y \sin(x)^2$

Aufgabe 3

Sei $\phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ die Abbildung, die jedem Paar $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ die Koeffizienten (p, q) des eindeutig betimmten normierten Polynoms $f = x^2 + px + q$ mit den Nullstellen α und β zuordnet.

(a) Geben Sie die Abbildung ϕ explizit an und bestimmen Sie die Ableitung.

(b) Sei $f = x^2 + px + q \in \mathbb{R}[x]$ ein Polynom mit zwei verschiedenen reellen Nullstellen α, β. Zeigen Sie mit Hilfe von Teil (a) und dem Satz über die lokale Umkehrbarkeit, dass offene Umgebungen U von (p, q) und V von (α, β) sowie ein $\mathcal{C}^1$-Diffeomorphismus $\psi : U \to V$ existieren mit der Eigenschaft, dass für alle $(p_1, q_1) \in U$ die beiden Komponenten von $(\alpha_1, \beta_1) = \psi(p_1, q_1)$ jeweils die beiden verschiedenen Nullstellen von $f_1 = x^2 + p_1x + q_1$ sind.

(c) Bestimmen Sie $\psi'(-10, 21)$ mit Hilfe der Umkehrregel. Wenn es die Zeit zulässt, überprüfen Sie Ihr Ergebnis mit Hilfe der p-q-Formel („Mitternachtsformel“) für quadratische Gleichungen.

Dieses Blatt wird vom 24. bis zum 28. Januar 2022 im Tutorium bearbeitet.

Analysis mehrerer Variablen

— Blatt 12 —

(Globalübungsblatt)

Aufgabe 1 (10 Punkte)

Berechnen Sie das erste, das zweite und das dritte Taylorpolynom der Funktion $f : (\mathbb{R}^+)^2 \to \mathbb{R}$ gegeben durch $f(x, y) = \ln(xy)$ an der Stelle $(1, 1)$.

Aufgabe 2 (5+5 Punkte)

(a) Bestimmen Sie alle lokalen Extrema der Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto y^2(1 + x^2)$. Geben Sie jeweils an, ob es sich um Maxima oder Minima handelt, und untersuchen Sie, ob die Extrema jeweils isoliert sind.

(b) Zeigen Sie, dass die Funktion $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto xe^x - (1 + e^x)\cos(y)$ unendlich viele lokale Minima, aber kein lokales Maximum besitzt.

Aufgabe 3 (3+3+4 Punkte)

Sei $\phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ die Abbildung, die jedem Tripel $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^2$ die Koeffizienten (p, q, r) des eindeutig bestimmten normierten Polynoms $f = x^3 + px^2 + qx + r$ mit den Nullstellen α, β, γ zuordnet.

(a) Geben Sie die Abbildung ϕ explizit an und bestimmen Sie die Ableitung.

(b) Sei $f = x^3 + px^2 + qx + r \in \mathbb{R}[x]$ ein Polynom mit drei verschiedenen reellen Nullstellen α, β, γ. Zeigen Sie, dass offene Umgebungen U von (p, q, r) und V von (α, β, γ) sowie ein $\mathcal{C}^1$-Diffeomorphismus $\psi : U \to V$ existieren mit der Eigenschaft, dass für alle $(p_1, q_1, r_1) \in U$ die drei Komponenten von $(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1) = \psi(p_1, q_1, r_1)$ jeweils die drei verschiedenen Nullstellen von $f_1 = x^3 + p_1x^2 + q_1x + r_1$ sind.

(c) Berechnen Sie $\psi'(-6, 11, -6)$.

Abgabe: Freitag, 4. Februar 2022, 10:15 Uhr

Verspätete Abgaben können aus organisatorischen Gründen leider nicht nachträglich angenommen werden. Bitte geben Sie auf jeder Abgabe die Nummer Ihrer Übungsgruppe an.