Freitag, 7. Januar 2022

Analysis mehrerer Variablen

— Blatt 10 —

(Tutoriumsblatt)

Aufgabe 0 *(Vorbereitung auf das Tutorium)*

(a) Wie ist die Jacobimatrix $f'(x, y, z)$ einer differenzierbaren Abbildung $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ an einer Stelle (x, y, z) definiert? Wenn $f(x, y, z) = (x, 2y^2, 3z^3)$ ist, wie sieht dann die Matrix $f'(1, 2, 3)$ aus?

(b) Was bedeutet es nach Definition, dass eine Funktion $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ in einem Punkt $a \in \mathbb{R}^3$ total differenzierbar ist? Betrachten Sie die Funktion f aus dem letzten Beispiel und den Punkt $a = (1, 2, 3)$. Wie sind die offene Teilmenge $U_a \subseteq \mathbb{R}^3$, die lineare Abbildung ϕ und der Fehlerterm ψ in dieser Situation definiert?

(c) Sei nun $f :]0, 2[\to \mathbb{R}$ eine Funktion, die im Punkt $a = 1$ differenzierbar ist. Geben Sie U_a und ϕ für diesen Fall an.

(d) Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ durch $f(x) = x^2 + 3x - 5$. Bestimmen Sie die Richtungsableitung $\partial_v f(4)$ für den Richtungsvektor $v = -5 \in \mathbb{R}^1$.

Aufgabe 1

Sei $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ gegeben durch $f(x, y, z) = (x^3 \sin(z), xy \cos(xz), e^{x^2+y^2} \sin(z))$.

(a) Begründen Sie, dass die Funktion f auf ihrem gesamten Definitionsbereich total differenzierbar ist.

(b) Bestimmen Sie die Jacobimatrix von f an der Stelle (x, y, z) für alle $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

(c) Berechnen Sie die Richtungsableitung $\partial_{(2,3,4)} f_2(0, 1, \pi)$.

Aufgabe 2

Sei $m, n \in \mathbb{N}$, außerdem $A \in \mathcal{M}_{m\times n,\mathbb{R}}$ und $b \in \mathbb{R}^m$. Sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ gegeben durch $f(x) = Ax + b$. Zeigen Sie, dass die Funktion f auf ihrem gesamten Definitionsbereich total differenzierbar ist, und geben Sie für jedes $x \in \mathbb{R}^n$ die Ableitung $f'(x)$ an.

Aufgabe 3

Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x,y) \quad = \quad \begin{cases} \exp\left(-\frac{1}{x^2+y^2}\right) & \text{für } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{für } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

(a) Beweisen Sie mit Hilfe der l'Hospitalschen Regel: Ist $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge positiver reeller Zahlen mit $\lim_n h_n = 0$, dann gilt $\lim_n h_n^{-1/2} e^{-1/h_n} = 0$.

(b) Sei $((x_n, y_n))_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ mit $\lim_n (x_n, y_n) = (0, 0)$. Zeigen Sie mit Hilfe von Aufgabenteil (a), dass $\lim_n \|(x_n, y_n)\|_2^{-1} f(x_n, y_n) = 0$ gilt.

(c) Begründen Sie mit Hilfe von Aufgabenteil (b), dass f in $(0, 0)$ total differenzierbar ist, und geben Sie die Jacobimatrix an der Stelle $(0, 0)$ an.

Dieses Blatt wird vom 10. bis zum 14. Januar 2022 im Tutorium bearbeitet.

Analysis mehrerer Variablen

— Blatt 10 —

(Globalübungsblatt)

Aufgabe 1 (5+5 Punkte)

Begründen Sie, dass die folgenden beiden Funktionen auf ihrem gesamten Definitionsbereich total differenzierbar sind, und bestimmen Sie an jedem Punkt die Jacobimatrix.

(a) $f : (\mathbb{R}^+)^2 \to \mathbb{R}^2$, $(x, y) \mapsto (x + \sqrt{y}, \sqrt{x} + y)$

(b) $g : (\mathbb{R}^+)^3 \to \mathbb{R}^2$, $(x, y, z) \mapsto (1 + \ln(x), x\sqrt{y} + \sqrt{z})$

Aufgabe 2 (10 Punkte)

Sei $n \in \mathbb{N}$ und $A \in \mathcal{M}_{n\times n,\mathbb{R}}$. Zeigen Sie, dass die Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ gegeben durch $f(x) = {}^{\mathrm{t}}xAx$ auf ihrem gesamten Definitionsbereich total differenzierbar ist, und bestimmen Sie $f'(x)$ für jedes $x \in \mathbb{R}^n$ als $(n \times 1)$-Matrix.

Aufgabe 3 (10 Punkte)

Untersuchen Sie, ob die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x, y) = \begin{cases} (x^2 + y^2)\sin\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right) & \text{für } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{für } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

in $(0, 0)$ total differenzierbar ist, und bestimmen Sie gegebenenfalls die Ableitung $f'(0, 0)$. Untersuchen Sie auch, ob die partiellen Ableitungen $\partial_1 f$ und $\partial_2 f$ in $(0, 0)$ existieren, und ob sie dort stetig sind.

Abgabe: Freitag, 21. Januar 2022, 10:15 Uhr
Verspätete Abgaben können aus organisatorischen Gründen leider nicht nachträglich angenommen werden. Bitte geben Sie auf jeder Abgabe die Nummer Ihrer Übungsgruppe an.