Freitag, 17. Dezember 2021

Analysis mehrerer Variablen

— Blatt 9 —

(Tutoriumsblatt)

Aufgabe 0 *(Vorbereitung auf das Tutorium)*

(a) Sei X eine Menge und δ_X die diskrete Metrik. Begründen Sie, dass die zusammenhängenden Mengen in X genau die leere und alle einelementigen Teilmengen sind.

(b) Zeigen Sie, dass $\{0,1\}$ keine wegzusammenhängende Teilmenge von $\mathbb{R}$ mit der Standardmetrik ist.

(c) Was sind die partiellen Ableitungen der Funktion $f(x,y,z) = \frac{xy}{z}$?

(d) Aus der Linearen Algebra ist bekannt, dass die Menge $\mathcal{M}_{2,\mathbb{R}}$ der 2×2-Matrizen ein 4-dimensionaler $\mathbb{R}$-Vektorraum ist, und dass die Determinantenfunktion det eine reellwertige Abbildung auf dieser Menge ist. Sei nun $E^{(2)} \in \mathcal{M}_{2,\mathbb{R}}$ die Einheitsmatrix und

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

Mit welcher Hilsfunktion $\phi : \mathbb{R} \to \mathcal{M}_{2,\mathbb{R}}$ kann man die Richtungsableitung $\partial_{E^{(2)}} \det(A)$ von det berechnen? Welchen Wert hat die Richtungsableitung?

Aufgabe 1

Sei $A = A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4$ die Vereinigung der vier Quadranten

$$A_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x,y > 0\} \quad , \quad A_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x < 0, y > 0\} \quad ,$$
$$A_3 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x,y < 0\} \quad \text{und} \quad A_4 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0, y < 0\}.$$

(a) Zeigen Sie, dass A_1 und A_2 konvex und damit wegzusammenhängend sind.
(Für A_3 und A_4 gilt das auch, aber hier sparen wir uns aus Zeitgründen den Beweis.)

(b) Zeigen Sie, dass A_1 in A sowohl relativ offen als auch relativ abgeschlossen ist.

(c) Weisen Sie nach, dass A nicht zusammenhängend ist.

Aufgabe 2

Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 y}{x^2 + y^2} & \text{falls } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{falls } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

(a) Zeigen Sie, dass f im Punkt $(0,0)$ stetig ist.

(b) Bestimmen Sie für jeden Vektor $v \in \mathbb{R}^2$ die Richtungsableitung $\partial_v f(0,0)$.

Aufgabe 3

Wir betrachten die Funktion $f : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$, $z \mapsto |z|^2$. Bestimmen Sie für jedes $z \in \mathbb{C}$ und jedes $w \in \mathbb{C}$ die Richtungsableitung $\partial_w f(z)$.

Dieses Blatt wird vom 20. bis zum 23. Dezember 2021 und am 7. Januar 2022 im Tutorium bearbeitet.

Analysis mehrerer Variablen

— Blatt 9 —

(Globalübungsblatt)

Aufgabe 1 (3+2+5 Punkte)

(a) Sei (X, d) ein metrischer Raum. Zeigen Sie: Ist $\gamma : [0, 1] \to X$ eine Funktion mit der Eigenschaft, dass $\gamma|_{[0,\frac{1}{2}]}$ und $\gamma|_{[\frac{1}{2},1]}$ stetig sind, dann ist γ stetig.

(b) Sei nun $X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0 \text{ oder } y \neq 0\}$. Zeigen Sie, dass X nicht konvex ist.

(c) Zeigen Sie mit Hilfe von Teil (a), dass X wegzusammenhängend ist.

Aufgabe 2 (2+3+3+2 Punkte)

Wir betrachten die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x, y) \quad = \quad \begin{cases} \dfrac{x^3 + y^3}{|x| + |y|} & \text{falls } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{falls } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

(a) Berechnen Sie die partielle Ableitung $\partial_1 f(x, y)$ für jeden Punkt (x, y) der Menge $U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x < 0\ ,\ y > 0\}$.

(b) Bestimmen Sie die partielle Ableitung $\partial_1 f(0, 0)$.

(c) Bestimmen Sie die Richtungsableitung $\partial_v f(0, 0)$ für den Vektor $v = (1, 1)$.

(d) Zeigen Sie, dass die partielle Ableitung $\partial_2 f(1, 0)$ nicht existiert.

Aufgabe 3 (5+5 Punkte)

Wir betrachten die Funktion $f : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$, $z \mapsto |z|$. Zeigen Sie:

(a) Ist $z \neq 0$, dann existiert für jedes $w \in \mathbb{C}$ die Richtungsableitung $\partial_w f(z)$.

(b) Für kein $w \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ existiert die Richtungsableitung $\partial_w f(0)$.

Abgabe: Freitag, 14. Januar 2022, 10:15 Uhr
Verspätete Abgaben können aus organisatorischen Gründen leider nicht nachträglich angenommen werden. Bitte geben Sie auf jeder Abgabe die Nummer Ihrer Übungsgruppe an.