

Analysis mehrerer Variablen

— Blatt 8 —

(Tutoriumsblatt)

Aufgabe 0 (Vorbereitung auf das Tutorium)

- (a) Geben Sie ein Beispiel für einen metrischen Raum (X, d_X) und Teilmengen $A \subseteq Y \subseteq X$ an, so dass A in Y relativ offen, aber A in X nicht offen ist.
- (b) Wenn $A \subseteq Y$ in X offen ist, folgt daraus immer, dass diese Menge in Y relativ offen ist? Falls ja, wie lässt sich das zeigen?
- (c) Was sind die kompakten Teilmengen von $[0, 1]$, ausgestattet mit der Standard-Metrik?
- (d) Was sind die kompakten Teilmengen von $\mathbb{N}$ und $\mathbb{R}$? Ist die Schnittmenge $[1, 2] \cap \mathbb{Q}$ eine kompakte Teilmenge von $\mathbb{Q}$? Auf jeder der drei Mengen wird die Standard-Metrik $d(x, y) = |x - y|$ zu Grunde gelegt.

Aufgabe 1

Sei $X = \mathbb{R}^2$ und d_X die Metrik auf X gegeben durch die Supremumsnorm. Sei außerdem $Y \subseteq X$ gegeben durch $Y = \{(x, y) \in X \mid x \geq 0\}$ und d_Y die Metrik, die man durch Einschränkung von d_X auf Y erhält. Wir bezeichnen jeweils mit $B_{r,X}(a)$ bzw. $B_{r,Y}(a)$ den offenen Ball vom Radius r um den Punkt a in (X, d_X) bzw. (Y, d_Y) .

- (a) Geben Sie einen Punkt an, der zwar in $B_{1,X}((0, 0))$, aber nicht in $B_{1,Y}((0, 0))$ liegt, und weisen Sie dies nach.
- (b) Zeigen Sie, dass die Menge $U = [0, 1[\times]-1, 1[\subseteq Y$ nicht offen in X ist.
- (c) Zeigen Sie, dass die Menge U in Y relativ offen ist.

Aufgabe 2

Sei $A \subseteq \mathbb{R}^2$ gegeben durch $A = \{(n, 0) \mid n \in \mathbb{Z}\}$ und $(U_i)_{i \in I}$ die offene Überdeckung von A gegeben durch $I = \mathbb{N}$, $U_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 3\}$, $U_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x < 0\}$ und $U_i = B_1((i - 3, 0))$ für $i \geq 3$, wobei $B_r(a)$ jeweils den offenen Ball vom Radius r bezüglich $\|\cdot\|_\infty$ bezeichnet.

- (a) Zeigen Sie, dass A in $(U_i)_{i \in I}$ eine endliche Teilüberdeckung besitzt.
- (b) Folgt aus Teil (a), dass A eine kompakte Teilmenge von $\mathbb{R}^2$ ist?
- (c) Entscheiden Sie, ob A kompakt ist, und begründen Sie Ihre Entscheidung.

Aufgabe 3

Sei $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine beschränkte Folge in $\mathbb{R}$.

- (a) Begründen Sie mit Hilfe des Satzes (5.11), dass die Folge eine konvergente Teilfolge besitzt (indem Sie angeben, auf welchen metrischen Raum der Satz angewendet werden soll).
- (b) Zeigen Sie, dass die Menge der Häufungspunkte der Folge in $\mathbb{R}$ abgeschlossen ist.
- (c) Beweisen Sie mit Hilfe von Teil (b), dass die Folgen einen kleinsten und einen größten Häufungspunkt besitzt.

Die Häufungspunkte aus Teil (c) werden als *Limes inferior* und *Limes superior* der Folge bezeichnet.

Dieses Blatt wird vom 13. bis zum 17. Dezember im Tutorium bearbeitet.

Analysis mehrerer Variablen

— Blatt 8 —

(Globalübungsblatt)

Aufgabe 1 (6+4 Punkte)

Sei $(\mathbb{R}, d)$ der metrische Raum mit $d(x, y) = |x - y|$ und $X = [0, 1] \cup [2, 3] \subseteq \mathbb{R}$.

- (a) Entscheiden Sie (mit Begründung), welche der folgenden drei Teilmengen von X relativ offen in X sind.

$$U_1 = [0, 1] \quad , \quad U_2 = [0, 1] \cup [2, 3] \quad , \quad U_3 = [0, 1[\cup]2, 3] .$$

- (b) Geben Sie Teilmengen $\emptyset \subsetneq U, V \subsetneq X$ an, so dass U weder relativ offen noch relativ abgeschlossen und V relativ offen und relativ abgeschlossen in X ist (jeweils mit Nachweis).

Aufgabe 2 (5+5 Punkte)

- (a) Zeigen Sie, dass $T = \{(-1)^n(1 - \frac{1}{n}) \mid n \in \mathbb{N}\}$ keine kompakte Teilmenge von $\mathbb{R}$ ist.

- (b) Weisen Sie nach, dass die Teilmenge $T \cup \{-1, 1\} \subseteq \mathbb{R}$ kompakt ist.

Aufgabe 3 (10 Punkte)

Sei (X, d_X) ein metrischer Raum, $n \in \mathbb{N}$, und seien $A_1, \dots, A_n$ kompakte Teilmengen von X . Zeigen Sie, dass dann auch $A = \bigcup_{k=1}^n A_k$ kompakt ist.

Abgabe: Freitag, 7. Januar 2021, 10:15 Uhr

Verspätete Abgaben können aus organisatorischen Gründen leider nicht nachträglich angenommen werden. Bitte geben Sie auf jeder Abgabe die Nummer Ihrer Übungsgruppe an.