Freitag, 26. November 2021

Analysis mehrerer Variablen

— Blatt 6 —

(Tutoriumsblatt)

Aufgabe 0 *(Vorbereitung auf das Tutorium)*

(a) Wie ist die Stetigkeit einer Abbildung zwischen metrischen Räumen definiert? Wie hängt die Definition mit der Definition aus der Analysis einer Variablen zusammen?

(b) Welche Möglichkeiten gibt es, die Stetigkeit einer Abbildung nachzuweisen?

(c) Was ist ein Homöomorphismus? Ist es möglich, dass eine bijektive Abbildung unstetig, ihre Umkehrabbildung aber stetig ist?

(d) Sei $f : X \to Y$ eine Abbildung zwischen metrischen Räumen, $D \subseteq X$ und $a \in D$. Ist es möglich, dass f in a stetig, $f|_D$ in a aber unstetig ist? Kann die umgekehrte Situation auftreten?

(e) Wie kann man nachweisen, dass es für eine Abbildung $f : X \to X$ auf einem metrischen Raum X ein $x \in X$ mit $f(x) = x$ gibt?

Aufgabe 1

(a) Sei (X, δ_X) eine Menge X ausgestattet mit der diskreten Metrik δ_X und (Y, d_Y) ein beliebiger metrischer Raum. Zeigen Sie, dass jede Abbildung $f : X \to Y$ stetig ist.

(b) Seien $(X, d_X), (Y, d_Y)$ metrische Räume, und sei $f : X \to Y$ ein Homöomorphismus. Zeigen Sie, dass eine Folge $(x^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ in X genau dann konvergiert, wenn $(f(x^{(n)}))_{n\in\mathbb{N}}$ in Y konvergiert.

(c) Zeigen Sie mit Hilfe von Aufgabenteil (b), dass $[0, 1]$ und $[0, 1[$ als metrische Räume mit der gewöhnlichen Metrik $d(a, b) = |b - a|$ nicht homöomorph sind.

Hinweis: Nach dem Satz von Bolzano-Weierstraß besitzt jede Folge in $[0, 1]$ einen Häufungspunkt.

Aufgabe 2

Wir betrachten die beiden Funktionen $f, g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & \text{falls } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{falls } (x,y) = (0,0) \end{cases} \quad , \quad g(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^2+y^2} & \text{falls } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{falls } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

(a) Zeigen Sie, dass f im Punkt $(0, 0)$ nicht stetig ist.

(b) Zeigen Sie, dass g im Punkt $(0, 0)$ stetig ist.

Aufgabe 3

(a) Zeigen Sie mit Hilfe des Banachschen Fixpunktsatzes, dass die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{4}x + \frac{3}{4}$ im Intervall $[1, 2]$ genau eine Nullstelle z besitzt.

(b) Definieren Sie eine Folge $(x^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ in $[1, 2]$, die gegen z konvergiert, und bestimmen Sie ein $n \in \mathbb{N}$ mit $|x^{(n)} - z| < \frac{1}{100}$.

Dieses Blatt wird vom 29. November bis zum 3. Dezember im Tutorium bearbeitet.

Analysis mehrerer Variablen

— **Blatt 6** —

(Globalübungsblatt)

Aufgabe 1 (2+3+5 Punkte)

Ein metrischer Raum (X, d_X) heißt *wegzusammenhängend*, wenn für zwei beliebig vorgegebene Punkte $x_0, x_1 \in X$ jeweils eine stetige Abbildung $\gamma : [0,1] \to X$ mit $\gamma(0) = x_0$ und $\gamma(1) = x_1$ existiert.

(a) Seien (X, d_X) und (Y, d_Y) homöomorphe metrische Räume, wobei (X, d_X) wegzsammenhängend ist. Zeigen Sie, dass dann auch (Y, d_Y) wegzusammenhängend ist.

(b) Weisen Sie nach, dass $[0,1]$ und $[0,1] \cup [2,3]$ als metrische Räume mit der gewöhnlichen Metrik $d(a,b) = |b-a|$ nicht homöomorph sind.

(c) Sei (X, d_X) wegzusammenhängend und (Y, δ_Y) eine Menge Y ausgestattet mit der diskreten Metrik δ_Y. Zeigen Sie, dass jede stetige Abbildung $f : X \to Y$ konstant ist.

Hinweis zu (c) Es läuft darauf hinaus zu zeigen, dass für jede stetige Abbildung $g : [0,1] \to Y$ jeweils $g(0) = g(1)$ gilt. Nehmen Sie das Gegenteil an und betrachten Sie $s = \sup\{x \in [0,1] \mid g(x) = g(0)\}$.

Aufgabe 2 (5+5 Punkte)

Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x,y) = \begin{cases} \left|\frac{y}{x^2}\right| e^{-\left|\frac{y}{x^2}\right|} & \text{falls } x \neq 0 \\ 0 & \text{falls } x = 0. \end{cases}$$

(a) Zeigen Sie, dass f im Punkt $(0,0)$ nicht stetig, in jedem Punkt $(x,y) \neq (0,0)$ aber stetig ist.

(b) Für jedes $c \in \mathbb{R}$ sei $g_c = \{(x, cx) \mid x \in \mathbb{R}\}$, außerdem $g_\infty = \{(0,y) \mid y \in \mathbb{R}\}$; dies sind die Geraden durch den Koordinatenursprung $(0,0)$. Weisen Sie nach, dass die eingeschränkte Abbildung $f|_{g_c}$ für jedes $c \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ eine in $(0,0)$ stetige Funktion ist.

Aufgabe 3 (5+5 Punkte)

(a) Zeigen Sie mit Hilfe des Banachschen Fixpunktsatzes, dass es für die Funktion $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x\sin(x) + \cos(x) - \frac{1}{4}\pi\sin(x)$ genau einen Punkt $z \in [0, \frac{1}{2}\pi]$ mit $g(z) = z$ gibt.

(b) Sei die Folge $(x^{(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ gegeben durch $x^{(0)} = \frac{1}{4}\pi$ und $x^{(n+1)} = g(x^{(n)})$. Geben Sie ein $n \in \mathbb{N}$ mit $|x^{(n)} - z| < 10^{-100}$ an.

Abgabe: Freitag, 10. Dezember 2021, 10:15 Uhr

Verspätete Abgaben können aus organisatorischen Gründen leider nicht nachträglich angenommen werden. Bitte geben Sie auf jeder Abgabe die Nummer Ihrer Übungsgruppe an.