Analysis mehrerer Variablen

— Blatt 5 —

(Tutoriumsblatt)

Aufgabe 0 *(Vorbereitung auf das Tutorium)*

(a) Wenn auf einem $\mathbb{R}$-Vektorraum V eine Norm $\|\cdot\|$ gegeben ist, wie erhält man die zugehörige induzierte Metrik? Kann man eventuell umgekehrt zu jeder Metrik d auf V durch $\|v\| = d(0_V, v)$ eine Norm definieren?

(b) Geben Sie eine Norm auf dem Raum $\mathcal{M}_{2,\mathbb{R}}$ der reellen 2×2-Matrizen an.

(c) Sei $\delta_{\mathbb{R}}$ die diskrete Metrik auf $\mathbb{R}$. Wie sehen die Cauchyfolgen im metrischen Raum $(\mathbb{R}, \delta_{\mathbb{R}})$ aus?

(d) Sei $A = \{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\}$. Dann ist durch $d(a,b) = |b-a|$ für $a, b \in A$ eine Metrik auf A definiert. Begründen Sie, dass (A, d) kein vollständiger metrischer Raum ist.

Aufgabe 1

Sei $V = \mathbb{R}^3$ und $\|\cdot\|_2$ die 2-Norm auf V. Sei $d : V \times V \to \mathbb{R}_+$ die Abbildung definiert durch

$$d(x,y) \quad = \quad \begin{cases} \|x-y\|_2 & \text{falls } \|x-y\|_2 < 1 \\ 1 & \text{sonst.} \end{cases}$$

(a) Zeigen Sie, dass d eine Metrik auf V ist. (Für die Dreiecksungleichung $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$ betrachten Sie zunächst den Fall, dass $\|x-y\|_2 < 1$ und $\|y-z\|_2 < 1$ gilt.)

(b) Weisen Sie nach, dass d nicht durch eine Norm induziert wird. Betrachten Sie dazu $d(0_V, v)$ und $d(0_V, 2v)$ für einen beliebigen Vektor $v \in V$ mit $\|v\|_2 \geq 1$.

(c) Der Satz von Bolzano-Weierstraß besagt, dass jede beschränkte Folge in $\mathbb{R}$ eine konvergente Teilfolge besitzt. Gilt dieser Satz auch für Metriken? Dabei soll „beschränkt“ hier bedeuten, dass $\{d(x^{(m)}, x^{(n)}) \mid m, n \in \mathbb{N}\}$ eine beschränkte Teilmenge von $\mathbb{R}_+$ ist.

Aufgabe 2

Seien V, $\|\cdot\|_2$ und d wie in Aufgabe 1 gegeben.

(a) Bestimmen Sie jeweils den offenen und abgeschlossen Ball bezüglich d um den Punkt $a = 0_V$ vom Radius r, für die Radien $r \in \{\frac{1}{2}, 1, 2\}$.

(b) Formulieren Sie eine Vermutung, wie $B_r(a)$ und $\bar{B}_r(a)$ für beliebiges $a \in V$ und $r \in \mathbb{R}^+$ aussehen könnten. Beweisen Sie diese anschließend.

Aufgabe 3

Sei $V = \mathcal{C}([0,1])$ der $\mathbb{R}$-Vektorraum aller stetigen Funktionen $f : [0,1] \to \mathbb{R}$. Seien die beiden Abbildungen $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_\infty : V \to \mathbb{R}_+$ gegeben durch

$$\|f\|_1 = \int_0^1 |f(x)|\, dx \qquad \text{und} \qquad \|f\|_\infty = \sup\{\, |f(x)| \;\mid x \in [0,1]\}.$$

(a) Zeigen Sie, dass $\|\cdot\|_1$ und $\|\cdot\|_\infty$ Normen auf V sind.

(b) Zeigen Sie, dass für alle $f \in V$ die Ungleichung $\|f\|_1 \leq \|f\|_\infty$ gilt.

(c) Weisen Sie nach, dass $\|\cdot\|_1$ und $\|\cdot\|_\infty$ nicht äquivalent sind.
Hinweis: Betrachten Sie die Funktionen gegeben durch $f_n(x) = x^n$ für $x \in [0,1]$, $n \in \mathbb{N}$.

Dieses Blatt wird vom 22. bis zum 26. November im Tutorium bearbeitet.

Analysis mehrerer Variablen

— **Blatt 5** —

(Globalübungsblatt)

Aufgabe 1 (4+3+3 Punkte)

Sei V ein $\mathbb{R}$-Vektorraum mit $V \neq \{0_V\}$ und $\|\cdot\|$ eine Norm auf V. Wir definieren eine Abbildung $d : V \times V \to \mathbb{R}_+$ durch

$$d(x,y) \quad = \quad \begin{cases} 0 & \text{falls } x = y \\ 1 & \text{falls } x \neq y, \|x-y\| \leq 1 \\ 2 & \text{falls } \|x-y\| > 1. \end{cases}$$

(a) Zeigen Sie, dass d eine Metrik auf V ist.

(b) Beweisen Sie, dass eine Folge $(x^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ genau dann in (V,d) gegen einen Punkt $a \in V$ konvergiert, wenn ein $N \in \mathbb{N}$ existiert, so dass $x^{(n)} = a$ für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq N$ gilt.

(c) Zeigen Sie, dass d durch keine Norm auf V induziert wird.

Aufgabe 2 (3+7 Punkte)

Sei (X,d) ein metrischer Raum und $(x^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in X. Ein Punkt $a \in X$ wird *Häufungspunkt* von $(x^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ genannt, wenn für jedes $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ jeweils $x^{(n)} \in B_\varepsilon(a)$ für unendlich viele $n \in \mathbb{N}$ gilt.

(a) Sei $(x^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge mit mindestens zwei verschiedenen Häufungspunkten. Beweisen Sie, dass $(x^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ in X nicht konvergiert.

(b) Sei nun (X,d) die Menge $X = [0,1] \times [0,1] \times [0,1] \subseteq \mathbb{R}^3$ mit der Metrik $d(x,y) = \|x-y\|_2$, wobei $\|\cdot\|_2$ die 2-Norm auf $\mathbb{R}^3$ bezeichnet. Zeigen Sie mit dem Satz von Bolzano-Weierstrass aus der Analysis einer Variablen, dass jede Folge in (X,d) mindestens einen Häufungspunkt besitzt.

Aufgabe 3 (10 Punkte)

Sei V ein $\mathbb{R}$-Vektorraum, und seien $\|\cdot\|$, $\|\cdot\|'$ zwei Normen auf V. Wir setzen voraus, dass in V eine Folge $(x^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ existiert mit der Eigenschaft

$$\lim_{n\to\infty} \|x^{(n)}\| = 0 \qquad \text{und} \qquad \|x^{(n)}\|' \geq 1 \text{ für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Beweisen Sie, dass die Normen $\|\cdot\|$ und $\|\cdot\|'$ nicht äquivalent sind.

Abgabe: Freitag, 3. Dezember 2021, 10:15 Uhr

Verspätete Abgaben können aus organisatorischen Gründen leider nicht nachträglich angenommen werden. Bitte geben Sie auf jeder Abgabe die Nummer Ihrer Übungsgruppe an.