Freitag, 5. November 2021

Analysis mehrerer Variablen

— Blatt 3 —

(Tutoriumsblatt)

Aufgabe 0 *(Vorbereitung auf das Tutorium)*

(a) Betrachten Sie $V = \mathbb{R}^1$ als $\mathbb{R}$-Vektorraum. Welche der Abbildungen $V \times V \to \mathbb{R}$ gegeben durch Addition, Subtraktion und Multiplikation, also $(x,y) \mapsto x+y$, $(x,y) \mapsto x-y$, $(x,y) \mapsto xy$, sind Bilinearformen?

(b) Sei V ein endlich-dimensionaler $\mathbb{R}$-Vektorraum und $\mathcal{B}$ eine geordnete Basis von V. Wie ist die Darstellungsmatrix $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(b)$ einer Bilinearform b auf V definiert? Wie lässt sich $b(v,w)$ für beliebige Vektoren $v, w \in V$ mit Hilfe der Darstellungsmatrix berechnen?

(c) Wir betrachten nun für den $\mathbb{R}$-Vektorraum $V = \mathbb{R}^1$ die Basis $\mathcal{B}$ gegeben durch $\mathcal{B} = (2)$. Sei b die eindeutig bestimmte Bilinearform auf V mit der Darstellungsmatrix $\mathcal{M}_B(b) = (5)$. Geben Sie $b(x,y)$ für alle $x, y \in \mathbb{R}^1$ an.

(d) Ist die Darstellungsmatrix einer Bilinearform b auf eine endlich-dimensionalen $\mathbb{R}$-Vektorraum immer invertierbar? Wie sieht es aus, wenn b positiv definit ist?

Aufgabe 1

Gegeben seien die folgenden $\mathbb{R}$-Vektorräume V und die folgenden Abbildungen $b : V \times V \to \mathbb{R}$. Untersuchen Sie für jede Abbildung, ob eine Bilinearform oder sogar ein Skalarprodukt vorliegt.

(a) $V = \mathbb{R}$, $b(x,y) = xy^2$

(b) $V = \mathbb{C}$, $b(z,w) = \mathrm{Re}(zw)$

(c) $V = \mathcal{C}([0,1])$, $b(f,g) = f(0)g(1)$

Dabei bezeichnet $\mathcal{C}([0,1])$ die Menge der stetigen Funktionen $f : [0,1] \to \mathbb{R}$.

Aufgabe 2

Sei b ein Skalarprodukt auf $V = \mathbb{R}^n$, $A \in \mathcal{M}_{n,\mathbb{R}}$ eine Matrix und $\tilde{b} : V \times V \to \mathbb{R}$ die Bilinearform gegeben durch $\tilde{b}(v,w) = b(Av, Aw)$. Aus der Vorlesung ist bekannt, dass es sich bei $\tilde{b}$ um eine Bilinearform handelt.

(a) Weisen Sie nach, dass $\tilde{b}$ genau dann ebenfalls ein Skalarprodukt ist, wenn A invertierbar ist.

(b) Sei konkret $n = 3$, b das Standard-Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^3$ und

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie die Darstellungsmatrix von $\tilde{b}$ bezüglich der Einheitsbasis von $\mathbb{R}^3$.

(c) Geben Sie eine allgemeine Formel für die Darstellungsmatrix von $\tilde{b}$ bezüglich der Einheitsbasis $\mathcal{E}$ von $\mathbb{R}^n$ an (in Abhängigkeit von A und $\mathcal{M}_{\mathcal{E}}(b)$, für beliebiges $n \in \mathbb{N}$ und $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$).

– Bitte wenden! –

Aufgabe 3

(a) Weisen Sie mit dem Hurwitz-Kriterium nach, dass die Matrix $A \in \mathcal{M}_{3,\mathbb{R}}$ gegeben durch

$$A \quad = \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \qquad \text{positiv definit ist.}$$

(b) Sei nun b die eindeutig bestimmte Bilinearform auf $\mathbb{R}^3$ mit $\mathcal{M}_{\mathcal{E}_3}(b) = A$, wobei $\mathcal{E}_3 = (e_1, e_2, e_3)$ die Einheitsbasis auf dem $\mathbb{R}^3$ bezeichnet. Erweitern Sie das einelementige Tupel (u_1) mit $u_1 = e_1$ durch Anwendung des Gram-Schmidt-Verfahrens zu einer Orthonormalbasis von $\mathbb{R}^3$ bezüglich b.

Dieses Blatt wird vom 8. bis zum 12. November im Tutorium bearbeitet.

Lineare Algebra

— Blatt 3 —

(Globalübungsblatt)

Aufgabe 1 (3+4+3 Punkte)

Gegeben seien die folgenden $\mathbb{R}$-Vektorräume V und die folgenden Abbildungen $b : V \times V \to \mathbb{R}$. Untersuchen Sie für jede Abbildung, ob eine Bilinearform oder sogar ein Skalarprodukt vorliegt.

(a) $V = \mathbb{R}^n$, $b(x, y) = \max\{x_i \mid 1 \leq i \leq n\} \max\{y_i \mid 1 \leq i \leq n\}$, wobei $n \geq 2$ ist

(b) $V = \mathbb{C}$, $b(z, w) = \mathrm{Re}(\bar{z}w)$

(c) $V = \mathcal{C}([a, b])$, $b(f, g) = f(a)g(a) + f(b)g(b)$

Aufgabe 2 (5+5 Punkte)

Sei $b : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ die eindeutig bestimmte Bilinearform mit $\mathcal{M}_{\mathcal{E}}(b) = A$, wobei $\mathcal{E}$ die Einheitsbasis bezeichnet und

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 8 & 5 \\ 8 & 21 & 15 \\ 5 & 15 & 11 \end{pmatrix} \quad \text{ist.}$$

(a) Bestimmen Sie $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(b)$ für die geordnete Basis

$$\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ -5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ -13 \\ 14 \end{pmatrix} \right).$$

(b) Sei $W \subseteq \mathbb{R}^3$ der Untervektorraum $W = \mathrm{lin}({}^{\mathrm{t}}(2, -5, 6))$ und $W^{\perp} = \{v \in \mathbb{R}^3 \mid b(v, w) = 0 \; \forall \; w \in W\}$. Geben Sie eine Basis von $W^{\perp}$ in $\mathcal{E}$- und in $\mathcal{B}$-Koordinaten an.

Aufgabe 3 (3+2+5 Punkte)

Sei V der dreidimensionale $\mathbb{R}$-Vektorraum der Polynomfunktionen vom Grad ≤ 2, und sei $b : V \times V \to \mathbb{R}$ die Bilinearform gegeben durch

$$b(f, g) = \int_{-1}^{2} f(x)g(x) \, dx.$$

(a) Berechnen Sie die Darstellungsmatrix A von b bezüglich der Basis $\mathcal{B} = (1, x, x^2)$.

(b) Weisen Sie mit dem Hurwitz-Kriterium nach, dass A positiv definit ist.

(c) Bestimmen Sie mit dem Gram-Schmidt-Verfahren eine ON-Basis $\mathcal{B}' = (f_0, f_1, f_2)$ von V bezüglich b, wobei f_0 durch $f_0(x) = \frac{1}{\sqrt{3}}$ für alle $x \in \mathbb{R}$ gegeben ist.

Abgabe: Freitag, 19. November 2021, 10:15 Uhr

Verspätete Abgaben können aus organisatorischen Gründen leider nicht nachträglich angenommen werden. Bitte geben Sie auf jeder Abgabe die Nummer Ihrer Übungsgruppe an.