Freitag, 29. Oktober 2021

Analysis mehrerer Variablen

— Blatt 2 —

(Tutoriumsblatt)

Aufgabe 0 *(Vorbereitung auf das Tutorium)*

(a) Geben Sie eine ON-Basis des Untervektorraums $U = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 + x_2 + x_3 = 0\}$ an.

(b) Geben Sie mit Hilfe dieser ON-Basis eine Orthogonalprojektion auf U an.

(c) Was bedeutet es, dass zwei affine Unterräume parallel sind? Wann sind sie windschief zueinander?

(d) Wie muss man vorgehen, um den Abstand zweier affiner Unterräume zu berechnen?

Aufgabe 1

Wir betrachten im $\mathbb{R}^4$ die affine Ebene E und die affine Gerade g gegeben durch

$$E = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \;\middle|\; \lambda, \mu \in \mathbb{R} \right\} \quad \text{und} \quad g = \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -4 \\ 4 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} \;\middle|\; \alpha \in \mathbb{R} \right\}.$$

(a) Zeigen Sie, dass der Untervektorraum $U = \mathcal{L}(g) + \mathcal{L}(E)$ mit $\operatorname{lin}\{e_1, e_2, e_3\}$ übereinstimmt.

(b) Berechnen Sie den Abstand $d(g, E)$.

Aufgabe 2

Sei $E \subseteq \mathbb{R}^3$ eine affine Ebene, $p \in E$ ein beliebiger Punkt und $n \in \mathbb{R}^3$ ein Vektor mit $n \perp \mathcal{L}(E)$ und $\|n\| = 1$. Die Abbildung $s_E : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $v \mapsto v \mapsto v - 2\langle v - p, n\rangle n$ wird als *Spiegelung* an E bezeichnet.

(a) Zeigen Sie, dass $s_E|_E = \mathrm{id}_E$ und $s_E \circ s_E = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}$ gelten.

(b) Seien nun E und E' zwei parallele Ebenen. Zeigen Sie, dass es sich bei $s_{E'} \circ s_E$ um eine *Translation* handelt, also um eine Abbildung der Form $\tau_w : \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}^3$, $v \mapsto v + w$ mit einem geeigneten Vektor $w \in \mathbb{R}^3$. Bestimmen Sie diesen Vektor w.

Aufgabe 3

In dieser Aufgabe verwenden wir dieselbe Notation wie in Satz (15.22).

(a) Als *Mittelsenkrechte* der Dreiecksseite AB bezeichnet man die affine Gerade, die durch den Mittelpunkt der Seite verläuft und auf der Seite orthogonal steht. Zeigen Sie, dass die Mittelsenkrechte genau aus den Punkten $x \in \mathbb{R}^3$ besteht, die die Gleichung $\langle x, \overrightarrow{AB}\rangle = \frac{1}{2}(\langle B, B\rangle - \langle A, A\rangle)$ erfüllen. Bestimmen Sie ebenso die Gleichungen der anderen beiden Mittelsenkrechten.

(b) Weisen Sie nach, dass sich die drei Mittelsenkrechten in einem gemeinsamen Punkt p schneiden.

(c) Zeigen Sie, dass alle Punkte der Mittelsenkrechten von AB von den beiden Eckpunkten A und B jeweils denselben Abstand haben. Für die beiden anderen Mittelsenkrechten gelten natürlich analoge Aussagen. Schließen Sie daraus, dass um den Punkt p aus Aufgabenteil (b) ein Kreis existiert, der durch alle drei Eckpunkte des Dreiecks verläuft.

Man bezeichnet den Kreis in Aufgabenteil (c) als den *Umkreis* des Dreiecks, und den Punkte p als *Umkreismittelpunkt*.

Dieses Blatt wird vom 2. bis zum 5. November im Tutorium bearbeitet.

Lineare Algebra

— Blatt 2 —

(Globalübungsblatt)

Aufgabe 1 (5+5 Punkte)

Sei $E \subseteq \mathbb{R}^3$ eine affine Ebene. Existieren $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ mit $a^2 + b^2 + c^2 = 1$, so dass E aus genau den Punkten $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ mit $ax + by + cz = d$ besteht, dann bezeichnet man diese Gleichung als *Hessesche Normalform* der Ebene E.

(a) Nehmen wir an, dass für E eine Hessesche Normalform wie angegeben existiert, und sei E' eine dazu parallele affine Ebene. Begründen Sie, dass E' die Form $ax+by+cz = d'$, mit einem geeigneten $d' \in \mathbb{R}$ und denselben a, b, c wie E. Bestimmen Sie den Abstand $d(E, E')$ in Abhängigkeit von d und d'.

(b) Bestimmen Sie mit Hilfe des Schnittdimensionssatzes alle Paare (d_1, d_2) natürlicher Zahlen mit $0 < d_1 \leq d_2 < 4$ mit folgender Eigenschaft: Es gibt im $\mathbb{R}^4$ affine Unterräume A_1, A_2 mit $\dim A_i = d_i$ für $i = 1, 2$, wobei A_1 und A_2 einen leeren Durchschnitt haben und windschief zueinander sind.

Aufgabe 2 (2+4+4 Punkte)

Sei $g \subseteq \mathbb{R}^2$ eine affine Gerade, $p \in g$ ein beliebiger Punkt und $n \in \mathbb{R}^2$ ein normierter Vektor mit $n \perp \mathcal{L}(g)$. Dann bezeichnen wir $s_g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $v \mapsto v - 2\langle v-p, n\rangle n$ als *Spiegelung* an der Geraden g. Eine *Gleitspiegelung* ist eine Abbildung $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ der Form $s_{g,w} = s_g \circ \tau_w$, wobei g eine affine Gerade und w einen Vektor in $\mathcal{L}(g)$ ungleich null bezeichnet. Wie auf dem Tutoriumsblatt bezeichnet $\tau_w : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ die Translationsabbildung gegeben durch $v \mapsto v + w$.

(a) Zeigen Sie, dass $s_{g,w} = \tau_w \circ s_g$ für alle affinen Geraden g und alle Vektoren $w \in \mathcal{L}(g) \setminus \{0_{\mathbb{R}^2}\}$ gilt.

(b) Ist $\alpha \in \mathbb{R}$ und $p \in \mathbb{R}^2$ ein beliebiger Punkt, dann wird $\rho_{\alpha,p} = \tau_p \circ \phi_{D_\alpha} \circ \tau_{-p}$ mit der Drehmatriz D_α als *Drehung* um den Punkt p mit Winkel α bezeichnet. Zeigen Sie, dass jede orientierungserhaltende Bewegung des $\mathbb{R}^2$ eine Translation oder eine Drehung ist.

(c) Zeigen Sie, dass jede orientierungsumkehrende Bewegung des $\mathbb{R}^2$ eine Spiegelung oder eine Gleitspiegelung ist.

Aufgabe 3 (2+3+2+3 Punkte)

Sind $v_0, w_0 \in \mathbb{R}^2$ normierte, linear unabhängige Vektoren, $p \in \mathbb{R}^2$ und $g = p + \mathbb{R}v_0$, $h = p + \mathbb{R}w_0$ zwei affine Geraden durch den Punkt p, und sind die Paare $(v_0, v_0 + w_0)$ und $(v_0 + w_0, w_0)$ positiv orientiert, dann bezeichnet man $p + \mathbb{R}(v_0 + w_0)$ als die *Winkelhalbierende* dieser beiden Geraden.

(a) Zeigen Sie, dass $\angle(v_0, v_0 + w_0) = \angle(w_0, v_0 + w_0) = \frac{1}{2}\angle(v_0, w_0)$ gilt, wodurch die Bezeichung „Winkelhalbierende“ gerechtfertigt ist.

(Fortsetzung auf der nächsten Seite)

(b) Nun verwenden wir wieder dieselben Bezeichnungen wie in Satz (15.22). Als Winkelhalbierende des Dreiecks im Winkel α bezeichnet man die Winkelhalbierende der beiden affinen Geraden, auf denen die Dreiecksseiten AB und AC liegen. Entsprechend sind die Winkelhalbierenden in β und γ definiert. Überprüfen Sie, dass $\mathbb{R}(\frac{1}{c}v + \frac{1}{b}w)$ die Winkelhalbierende im Winkel α ist, und bestimmen Sie auch die anderen beiden Winkelhalbierenden.

(c) Überprüfen Sie, dass sich die drei Winkelhalbierenden in einem gemeinsamen Punkt p schneiden.

(d) Weisen Sie nach, dass jeder einzelne Punkt der Winkelhalbierenden in α von den beiden Geraden durch AB und AC jeweils denselben Abstand hat, und das Entsprechendes für die anderen Winkelhalbierenden gilt. Schließen Sie daraus, dass um den Punkt p herum ein Kreis existiert, der jede Seite des Dreiecks berührt.

Man nennt den Kreis in Aufgabenteil (d) den *Inkreis* und p den *Inkreismittelpunkt* des Dreiecks.

Abgabe: Freitag, 12. November 2021, 10:15 Uhr
Verspätete Abgaben können aus organisatorischen Gründen leider nicht nachträglich angenommen werden. Bitte geben Sie auf jeder Abgabe die Nummer Ihrer Übungsgruppe an.