Freitag, 22. Oktober 2021

# Analysis mehrerer Variablen

**— Blatt 1 —**

(Tutoriumsblatt)

**Aufgabe 0** *(Vorbereitung auf das Tutorium)*

(a) Geben Sie die Definition einer nilpotenten Matrix an.

(b) Geben Sie einen nilpotenten Endomorphismus $\phi \neq 0$ eines $\mathbb{R}$-Vektorraums $V$ an.

(c) Wie sind die Haupträume eines Endomorphismus $\phi \in \mathrm{End}_K(V)$ definiert (wobei $K$ einen Körper und $V$ einen endlich-dimensionalen $K$-Vektorraum bezeichnet)? Wie erkennt man, dass es sich um Untervektorräume von $V$ handelt, und wie lassen sie sich ausrechnen?

(d) Geben Sie eine Matrix $A \in \mathcal{M}_{3,\mathbb{R}}$ mit $A^2 \neq 0$ und $A^3 = 0$ an.

(e) Welche drei Jordanketten des Endomorphismus $\phi_A \in \mathrm{End}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^6)$ können an der folgenden Matrix $A$ abgelesen werden?

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

**Aufgabe 1**

Sei $K$ ein Körper und $V \neq \{0_V\}$ ein endlich-dimensionaler $K$-Vektorraum.

(a) Sei $\phi \in \mathrm{End}_K(V)$ nilpotent. Zeigen Sie, dass $\phi$ keine von null verschiedenen Eigenwerte besitzt.

(b) Zeigen Sie, dass genau dann jeder nilpotente Endomorphismus von $V$ gleich null ist, wenn die Dimension von $V$ gleich 1 ist.

(c) Geben Sie eine Matrix $A$ mit $\dim \mathrm{Eig}(A, 5) = 1$ und $\dim \mathrm{Hau}(A, 5) = 2$ an (mit Nachweis).

(d) Sei $A \in \mathcal{M}_{2,\mathbb{R}}$ in Jordanscher Normalform mit $\dim \mathrm{Hau}(A, 5) = 1$.
Zeigen Sie, dass dann $\mathrm{Hau}(A, 5) = \mathrm{Eig}(A, 5)$ gilt.

**Aufgabe 2**

(a) Bestimmen Sie jeweils eine Matrix $A$ über $\mathbb{R}$ mit $\chi_A = (x-2)^3(x-5)^4$ und $\mu_A(x-2)(x-5)$, $\mu_A = (x-2)^2(x-5)^2$ bzw. $(x-2)^3(x-5)^3$.

(b) Gibt es eine Matrix $A$ mit $\chi_A = (x-2)^3(x-5)^4$ und $\mu_A = (x-2)^4(x-5)^3$ bzw. $\mu_A = (x-2)^2$? Bitte begründen Sie jeweils Ihre Antwort.

**– bitte wenden! –**

**Aufgabe 3**

Gegeben sei die folgende Matrix $A \in \mathcal{M}_{3,\mathbb{R}}$ mit $\chi_A = (x-3)^2(x-7)$ (braucht nicht überprüft werden).

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -4 & -4 \\ 9 & 21 & 14 \\ -8 & -16 & -9 \end{pmatrix}$$

(a) Bestimmen Sie Basen für die beiden Haupträume $\mathrm{Hau}(A,3)$ und $\mathrm{Hau}(A,7)$.

(b) Bestimmen Sie eine Matrix $T \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$ mit der Eigenschaft, dass $J = T^{-1}AT$ eine Matrix in Jordanscher Normalform ist.

**Dieses Blatt wird vom 25. bis zum 29. Oktober im Tutorium bearbeitet.**

# Lineare Algebra

— **Blatt 1** —

(Globalübungsblatt)

**Aufgabe 1** (2+2+3+3 Punkte)

Sei $K$ ein Körper, $n \in \mathbb{N}$ und $V$ ein $n$-dimensionaler $K$-Vektorraum.

(a) Begründen Sie, dass ähnliche Matrizen $A, B \in \mathcal{M}_{n,K}$ dasselbe Minimalpolynom besitzen, also $\mu_A = \mu_B$ gilt.

(b) Sei $\phi \in \mathrm{End}_K(V)$ und $\lambda \in K$ mit $\mathrm{Hau}(\phi, \lambda) \neq \{0_V\}$. Begründen Sie, dass $\mathrm{Hau}(\phi, \lambda)$ mindestens einen Eigenvektor von $\phi$ enthält.

(c) Sei $\lambda \in K$. Begründen Sie, dass für jedes $k \in \{1, ..., n\}$ jeweils ein Endomorphismus $\phi$ von $V$ mit $\chi_\phi = (x - \lambda)^n$, $\mu_\phi = (x - \lambda)^k$ und $\mu_g(\phi, \lambda) = n + 1 - k$ existiert.

(d) Entscheiden Sie, ob die folgende Aussage allgemein zutrifft, und begründen Sie Ihre Entscheidung: Ist 0 der einzige Eigenwert eines Endomorphismus $\phi \in \mathrm{End}_K(V)$, dann ist $\phi$ nilpotent. Wie lautet die Antwort im Fall $K = \mathbb{C}$?

**Aufgabe 2** (10 Punkte) *(Staatsexamen Herbst 2014)*

Die reelle $(6 \times 6)$-Matrix $A$ habe den sechsfachen Eigenwert 1 mit der algebraischen Vielfachheit 6 und der geometrischen Vielfachheit 3. Es gelte weiterhin $A = E_6 + N$, wobei $E_6$ die Einheitsmatrix und $N$ eine nilpotente Matrix mit $N^3 = 0$, aber $N^2 \neq 0$ bezeichnet. Bestimmen Sie eine Jordansche Normalform der Matrix $A$.

**Aufgabe 3** (10 Punkte)

Sei $A \in \mathcal{M}_{4,\mathbb{R}}$ gegeben durch

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & -2 & 4 \\ -7 & 6 & -4 & 7 \\ 2 & -1 & 3 & -2 \\ 3 & -2 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Das charakteristische Polynom dieser Matrix ist $\chi_A = (x-1)^2(x-2)^2$. Bestimmen Sie eine Matrix $T \in \mathrm{GL}_4(\mathbb{R})$, so dass sich die Matrix $J = T^{-1}AT$ in Jordanscher Normalform befindet, und und geben Sie das Minimalpolynom $\mu_A \in \mathbb{R}[x]$ von $A$ an.

**Abgabe:** Freitag, 5. November 2021, 10:15 Uhr
Verspätete Abgaben können aus organisatorischen Gründen leider nicht nachträglich angenommen werden. Bitte geben Sie auf jeder Abgabe die Nummer Ihrer Übungsgruppe an.