LMU LUDWIG-MAXIMILIANS-UNIVERSITÄT MÜNCHEN | MATHEMATISCHES INSTITUT

Dr. Ralf Gerkmann — Wintersemester 2021/22

21.04.2022

Analysis mehrerer Variablen (LA Gym)

(Lehramt Gymnasium)

Online-Nachholklausur

Nachname: ______________________ Vorname: ______________________

Matrikelnr.: ____

Studiengang:
- ❏ Lehramt Gymnasium
- ❏ Bachelor Wirtschaftspädagogik

Ihr Klausurergebnis können Sie auf der Vorlesungshomepage mit Hilfe eines Benutzernamens, eines Passworts und einer vierstelligen Identifikationsnummer abrufen, die Ihnen persönlich zugeordnet ist. Diese Daten erhalten Sie per Email.

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	$\sum$
Punkte									

Hiermit erkläre ich, die Klausur eigenständig bearbeitet und während der Bearbeitungszeit keinen Kontakt zu anderen Personen aufgenommen habe.

____

(Unterschrift)

Hinweise:

(a) Wie bei den Präsenzklausuren achten Sie bitte auch hier darauf, auf jedem Blatt **immer nur eine Aufgabe** zu bearbeiten.

(b) Als Hilfsmittel zugelassen, aber bei guter Vorbereitung nicht notwendig, sind das Skript, Lösungen von Übungsaufgaben, Lehrbücher und beliebige andere Materialien. Nicht zulässig ist die Kontaktaufnahme zu anderen Personen während der Bearbeitungszeit. Bitte denken Sie auch daran, die obige Eigenständigkeitserklärung zu unterschreiben.

(c) Nach der regulären Bearbeitungszeit von 120 Minuten stehen weitere 45 Minuten zum Einscannen (oder notfalls Fotografieren) der Klausurblätter und zum Versenden per Email zur Verfügung. Akzeptiert wird nur eine einzelne, zusammenhängende PDF-Datei. Einsendungen, die nach 12:15:00 Uhr eintreffen, können nicht gewertet werden.

(d) Füllen Sie das Deckblatt bitte in BLOCKSCHRIFT aus. Schreiben Sie auf **jedes Blatt** Ihren **Vor- und Nachnamen**.

(e) Bitte denken Sie daran, jeden Schritt Ihrer Lösung zu begründen und explizit darauf hinzuweisen, wenn Sie Ergebnisse aus der Vorlesung verwenden. Die Verwendung von Ergebnissen aus Übungsaufgaben ist **nicht** zulässig.

(f) Bitte achten Sie darauf, dass Sie zu jeder Aufgabe nur eine Lösung abgeben; streichen Sie deutlich durch, was nicht gewertet werden soll.

Bearbeitungszeit: 120+45 Minuten

Viel Erfolg!

Name: ______________________________

Aufgabe 1. (6+4 Punkte)

(a) Berechnen Sie je eine Basis der Haupträume $\mathrm{Hau}(A,-2)$ und $\mathrm{Hau}(A,3)$ für die Matrix

$$A \quad = \quad \begin{pmatrix} -15 & -10 & 4 \\ 26 & 18 & -8 \\ 9 & 5 & 1 \end{pmatrix} \quad \in \mathcal{M}_{2,\mathbb{R}}.$$

(b) Sei nun $B = 3E_5 + N \in \mathcal{M}_{5,\mathbb{R}}$, wobei E_5 die reelle 5×5-Einheitsmatrix und $N \in \mathcal{M}_{5,\mathbb{R}}$ eine nilpotente Matrix mit $N \neq 0$ und $N^2 = 0$ bezeichnet. Außerdem sei $\dim \mathrm{Eig}(B,3) = 3$. Geben Sie eine Jordansche Normalform von B an, und begründen Sie Ihr Ergebnis.

Name: ____________________

Aufgabe 2. (4+4+2 Punkte)

Sei V der $\mathbb{R}$-Vektorraum der Polynomfunktionen vom Grad ≤ 2 und $b : V \times V \to \mathbb{R}$ gegeben durch $b(f,g) = f'(1)g'(1) + f'(2)g'(2)$ für alle $f, g \in V$.

(a) Zeigen Sie, dass b eine symmetrische Bilinearform auf V ist.

(b) Bestimmen Sie die Darstellungsmatrix $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(b)$ von b bezüglich der geordneten Basis $\mathcal{B} = (1 - x, 2 + 3x, x^2 + 1)$.

(c) Entscheiden Sie, ob b positiv definit ist, und begründen Sie Ihre Entscheidung.

Name: ______________________________

Aufgabe 3. (6+4 Punkte)

(a) Sei $\delta_{\mathbb{R}} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ die diskrete Metrik auf der Menge $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen gegeben durch $\delta_{\mathbb{R}}(x,x) = 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$ und $\delta_{\mathbb{R}}(x,y) = 1$ für alle $x, y \in \mathbb{R}$ mit $x \neq y$. Zeigen Sie, dass $(\mathbb{R}, \delta_{\mathbb{R}})$ ein vollständiger metrischer Raum ist.

(b) Sei nun $V = \mathbb{R}^2$, $\|\cdot\|_2$ die euklidische Norm auf V und $d : V \times V \to \mathbb{R}_+$ gegeben durch

$$d(v,w) = \begin{cases} 0 & \text{falls } v = w \\ 1 & \text{falls } v \neq w \text{ und } \|v-w\|_2 \leq 1 \\ 2 & \text{falls } \|v-w\|_2 > 1 \end{cases}$$

für alle $v, w \in V$. Geben Sie für jedes $r \in \mathbb{R}^+$ im metrischen Raum (V, d) jeweils den offenen und den abgeschlossenen Ball vom Radius r um den Nullpunkt $0_{\mathbb{R}^2} = (0,0)$ an. Ein Nachweis ist hierbei *nicht* erforderlich.

Name: ______________________________

Aufgabe 4. (2+4+4 Punkte)

(a) Sei (X, d) ein metrischer Raum, $Y \subseteq X$ eine offene und $Z \subseteq X$ eine abgeschlossene Teilmenge. Zeigen Sie, dass $Y \setminus Z$ in (X, d) offen ist.

(b) Entscheiden Sie, ob die lineare Abbildung $\phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $(x, y) \mapsto (x + y, x - y)$ stetig ist, und begründen Sie Ihre Entscheidung. Bestimmen Sie im Falle der Stetigkeit auch die Operatornorm dieser linearen Abbildung, wobei auf $\mathbb{R}^2$ die Supremumsnorm $\|(x, y)\|_\infty = \max\{|x|, |y|\}$ zu Grunde gelegt wird.

(c) Sei (X, d) ein metrischer Raum und $A \subseteq X$ eine kompakte Teilmenge. Ist dann auch jede Teilmenge $B \subseteq A$ in (X, d) kompakt? Geben Sie entweder einen Beweis oder ein konkretes Gegenbeispiel an, und begründen Sie gegebenenfalls, dass es sich tatsächlich um ein Gegenbeispiel für diese Aussage handelt.

Name: ______________________________

Aufgabe 5. (3+4+3 Punkte)

Wir betrachten die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x,y) \quad = \quad \begin{cases} \dfrac{7xy}{2x^2+3y^2} & \text{falls } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{falls } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

(a) Ist die Funktion f im Nullpunkt $(0,0)$ total differenzierbar?

(b) Existieren die partiellen Ableitungen $\partial_1 f(0,0)$ und $\partial_2 f(0,0)$?

(c) Existiert die Richtungsableitung $\partial_v f(0,0)$ für den Vektor $v = (4,3)$?

Bitte begründen Sie jeweils Ihre Antwort. Falls die genannten Ableitungen existieren, geben Sie diese jeweils an.

Name: ____________________

Aufgabe 6. (3+3+4 Punkte)

Sei $U = \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \subseteq \mathbb{R}^2$ und $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben durch $f(x) = \sqrt[3]{(x^2+2)^3 + (x+1)^2}$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

(a) Geben Sie total differenzierbare Funktionen $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ und $h : U \to \mathbb{R}$ an, so dass $f = h \circ g$ gilt, und weisen Sie nach, dass diese Gleichung tatsächlich erfüllt ist.

(b) Bestimmen Sie die totalen Ableitungen der Funktionen g und h auf ihrem jeweiligen Definitionsbereich.

(c) Bestimmen Sie die totale Ableitung von f durch Anwendung der mehrdimensionalen Kettenregel auf die Funktionen g und h.

In Teil (c) ist die Anwendung der mehrdimensionalen Kettenregel wesentlicher Bestandteil der Aufgabenstellung. Es ist unzulässig, die Ableitung von f direkt auszurechnen.

Name: ____________________

Aufgabe 7. (6+4 Punkte)

Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gegeben durch $f(x, y) = -x^2 - 2xy - 2y^2 + 4x + 2y - 2$ für alle $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

(a) Bestimmen Sie alle kritischen Stellen von f.

(b) Bestimmen Sie alle lokalen Extrema von f, und geben Sie jeweils an, ob es sich um ein lokales Maximum oder um ein lokales Minimum handelt (mit Nachweis).

Hinweis: Eine Matrix $A \in \mathcal{M}_{2,\mathbb{R}}$ ist genau dann negativ definit, wenn $-A$ positiv definit ist.

Name: ______________________________

Aufgabe 8. (4+6 Punkte)

(a) Sei $Q = [0,1] \times [0,1] \subseteq \mathbb{R}^2$ und $f : Q \to \mathbb{R}_+$ eine Funktion mit $f(x,y) = 0$ für alle $x \in [0,1] \cap \mathbb{Q}$ und $y \in [0,1]$. Sei $\mathcal{Z} = (\mathcal{Z}_1, \mathcal{Z}_2)$ eine beliebige Zerlegung von Q. Zeigen Sie, dass die Untersumme $\mathcal{S}_f^-(\mathcal{Z})$ gleich null ist. (Dabei bezeichnet $\mathbb{R}_+ = \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ wie immer die Menge der nichtnegativen reellen Zahlen.)

(b) Sei $R = [1,2] \times [3,4]$. Berechnen Sie das Integral

$$\int_R x e^{xy}\, d(x,y).$$