Checkliste zur Klausurvorbereitung in

Analysis mehrerer Variablen

Achtung: Diese Liste ist *nicht* dazu gedacht, einzelne Themen für die Klausur auszuschließen. Alles, was in der Vorlesung durchgenommen wurde, kann prinzipiell in der Klausur vorkommen. Ich wäre aber für Hinweise dankbar, falls Sie bemerken, dass ich einen wichtigen Punkt übersehen habe.

(a) Grundbegriffe

Teil 1: Lineare Algebra (§ 14 - § 16)

- Minimalpolynom eines Endomorphismus oder einer Matrix
- Begleitmatrix eines Polynoms
- Jordanmatrix, Jordanblock, Jordansche Normalform, Jordanbasis, Jordankette
- Hauptraum zu einem Eigenwert eines Endomorphismus bzw. einer Matrix
- nilpotenter Endomorphismus, nilpotente Matrix
- euklidisches Standard-Skalarprodukt auf dem $\mathbb{R}^n$
- Definition von Abständen und Winkeln mit dem euklidischen Standard-Skalarprodukt
- parallele und windschiefe affine Unterräume des $\mathbb{R}^n$
- positive bzw. negative Orientierung einer Basis des $\mathbb{R}^n$
- orthogonale Matrix, orthogonale Gruppe und spezielle orthogonale Gruppe
- Bewegung des $\mathbb{R}^n$, orientierungserhaltende und -umkehrende Bewegung
- Bilinearform auf einem $\mathbb{R}$-Vektorraum, symmetrische und positiv definite Bilinearform, Skalarprodukt, euklidischer Vektorraum
- symmetrische und positiv definite Matrix
- Darstellungsmatrix einer Bilinearform bezüglich einer Basis
- Eigenschaften „symmetrisch“ und „positiv definit“, Skalarprodukte, euklidische Vektorräume
- Norm auf einem $\mathbb{R}$-Vektorraum, Dreiecksungleichung
- Orthonormalbasis
- Orthogonalprojektion auf einen Untervektorraum
- orthogonale und symmetrische (selbstadjungierte) Endomorphismen
- hermitesche Sesquilinearform
- orthogonale, unitäre und hermitesche Matrizen

Teil 2: Topologie der metrischen Räume, Stetigkeit (§ 1 - § 6)

- Supremumsnorm und p-Normen auf dem $\mathbb{R}^n$ (für $1 \leq p < +\infty$)
- Äquivalenz von Normen
- Metrik auf einer Menge, metrischer Raum, diskrete Metrik
- offene und abgeschlossene Bälle vom Radius $r \in \mathbb{R}^+$ in einem metrischen Raum
- Konvergenz einer Folge in einem metrischen Raum
- Cauchy-Folge in einem metrischen Raum, Vollständigkeit, Banachraum
- Kontraktion auf einem metrischen Raum
- Stetigkeit einer Abbildung $f : X \to Y$ zwischen metrischen Räumen (X, d_X) und (Y, d_Y), Funktionsgrenzwerte einer solchen Abbildung
- Homömorphismen und homöomorphe metrische Räume
- Operatornorm einer stetigen linearen Abbildung
- offene und abgeschlossene Teilmengen eines metrischen Raums
- Umgebung eines Punktes a in einem metrischen Raum
- beschränkte Teilmenge eines metrischen Raums, Durchmesser
- innerer Punkt einer Teilmenge, Abschluss und Rand
- relative Offenheit und Abgeschlossenheit
- offene Überdeckung einer Teilmenge eines metrischen Raums, Kompaktheit
- Häufungspunkt einer Teilmenge eines metrischen Raums
- gleichmäßige Stetigkeit von Abbildungen zwischen metrischen Räumen
- zusammenhängende und wegzusammenhängende Teilmengen eines metrischen Raums
- Verbindungsstrecke zwischen zwei Punkten, Konvexität

Teil 3: Differenzialrechnung (§ 7-§ 11)

- Richtungsableitung $\partial_v f(a)$ einer Funktion auf einem $\mathbb{R}$-Vektorraum
- partielle Ableitungen als Spezialfälle
- partielle Ableitung, Richtungsableitung
- totale Differenzierbarkeit einer Abbildung $f : U \to W$ in einem Punkt $a \in U$ (V, W endlich-dim. $\mathbb{R}$-Vektorräume, $U \subseteq V$ offen)
- Jacobi- oder Funktionalmatrix einer Funktion f an einer Stelle a
- p-fach (stetig) differenzierbare Abbildung, p-te Ableitung
- Taylorpolynom p-ten Grades von f im Punkt a

- (isoliertes) lokales Maximum, Minimum, Extremum
- kritischer Punkt einer differenzierbaren Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$
- positiv (semi-)definite, negativ (semi-)definite, indefinite Matrix
- $\mathcal{C}^1$-Abbildung, $\mathcal{C}^1$-Diffeomorphismus
- implizite Definition einer Funktion
- verallgemeinerte (mehrdimensionale) partielle Ableitung
- d-dimensionale Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^n$
- Lagrange-Multiplikator

Teil 3: Integralrechnung (§ 12-§ 14)

- Zerlegung eines mehrdimensionalen Quaders, Teilquader bezüglich einer Zerlegung, Verfeinerung von Zerlegungen
- Unter- und Obersumme bezüglich einer Zerlegung
- Unter- und Oberintegral, Riemann-integrierbar, Riemann-Integral (im Mehrdimensionalen)
- (Jordansche) Nullmenge

(b) Wichtige Sätze und Zusammenhänge, Verständnisfragen

Teil 1: Lineare Algebra

- Wie lässt sich anhand der Jordanschen Normalform einer Matrix $A \in \mathcal{M}_{n,K}$ erkennen, ob A diagonalisierbar ist?
- Gibt es Matrizen, die dasselbe charakteristische Polynom und dasselbe Minimalpolynom, aber unterschiedliche Jordansche Normalformen haben? (Dabei ist mit „unterschiedlich“ gemeint, dass die Normalformen sich nicht nur durch die Reihenfolge der Jordanblöcke unterscheiden.) Falls nein, begründen Sie dies, ansonsten geben Sie zwei Matrizen mit diesen Eigenschaften an.
- Unter welcher Bedingung besitzt eine Matrix eine Jordansche Normalform? Besitzt jede nilpotente Matrix eine Jordansche Normalform?
- Wie bestimmt man die Anzahl der Jordanblöcke einer Matrix zu einem gegebenen Eigenwert? Welche Schritte muss man durchführen, um die Jordansche Normalform einer Matrix insgesamt zu bestimmen?
- Welche Einträge hat die Darstellungsmatrix $M_{\mathcal{B}}(b)$ einer Bilinearform b bezüglich einer Basis $\mathcal{B}$?
- Sei V ein zweidimensionaler $\mathbb{R}$-Vektorraum, $\mathcal{B} = (v_1, v_2)$ eine geordnete Basis von V und b eine Bilinearform mit der Darstellungsmatrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

  bezüglich $\mathcal{B}$. Geben Sie $b(v_1, v_1)$, $b(v_1, v_1 + v_2)$ und $b(v_1 + 2v_2, v_1 + 2v_2)$ an.
- Was bedeutet es, dass zwei Vektoren v, w bezüglich einer Bilinearform b orthogonal sind?
- Wie lässt sich mit Hilfe eines Sklarprodukts b eine Norm $\|\cdot\|_b$ definieren?

- Wofür wird die Matrix $T^{\mathcal{A}}_{\mathcal{B}}$ des Basiswechsels von einer Basis $\mathcal{A}$ zu einer anderen Basis $\mathcal{B}$ verwendet? Wie lautet die Transformationsformel für Bilinearformen?
- Durch welche Eigenschaften ist die Orthogonalprojektion $\pi_U : V \to U$ auf einen Untervektorraum U charakterisiert? Wie lässt sich $\pi_U(v)$ für einen Vektor $v \in V$ mit Hilfe einer ON-Basis von U berechnen?
- Welcher Zusammenhang besteht zwischen positiv definiten Bilinearformen und positiv definiten Matrizen? Mit welchem Kriterium kann getestet werden, ob eine Matrix positiv definit ist?
- Was besagt der Satz über die Hauptachsentransformation?

Teil 2: Topologische Eigenschaften metrischer Räume, Stetigkeit

- Welche Beispiele für Normen auf dem $\mathbb{R}^n$ wurden in der Vorlesung behandelt?
- Sind die Normen $\|\cdot\|_3$ und $\|\cdot\|_\infty$ auf dem $\mathbb{R}^4$ äquivalent?
- Wie lässt sich mit Hilfe einer Norm $\|\cdot\|$ eine Metrik d auf einem $\mathbb{R}$-Vektorraum V definieren? Kommt jede Metrik durch eine Norm zu Stande?
- Wie ist die diskrete Metrik auf einer Menge X definiert? Wie sehen die offenen und abgeschlossenen Bälle bezüglich der diskreten Metrik aus?
- Warum kann im $\mathbb{R}^n$ von der Konvergenz einer Folge gesprochen werden, ohne sich dabei auf eine konkrete Metrik zu beziehen?
- Mit welchem Kriterium lässt sich häufig schnell entscheiden, ob konkret vorgegebene Folgen im $\mathbb{R}^2$ wie zum Beispiel $((\frac{n+1}{n}, \frac{1}{n}))_{n\in\mathbb{N}}$ oder $((-1)^n, \frac{2}{n})_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent sind?
- Was besagt der Banachsche Fixpunktsatz?
- Die Stetigkeit einer Abbildung $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ kann „komponentenweise“ überprüft werden. Was bedeutet das genau?
- Wie lässt sich die Stetigkeit von rationalen Funktionen wie zum Beispiel
$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} \quad , \quad (x,y) \mapsto \frac{x^3 + xy + y^4}{x^2 + y^2 + 1} \qquad \text{begründen?}$$
- Welche Beispiele für Homöomorphismen wurden in der Vorlesung behandelt?
- Mit welchem Kriterium kann eine lineare Abbildung auf Stetigkeit getestet werden? Geben Sie ein Beispiel für eine unstetige lineare Abbildung an, und weisen Sie diese Eigenschaft mit dem Kriterium nach.
- Gibt es eine unstetige lineare Abbildung $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$?
- Welche konkreten Beispiele für offene Teilmengen von $\mathbb{R}$ und von $\mathbb{R}^2$ sind aus der Vorlesung bekannt? Geben Sie mindestens ein Beispiel für eine offene Teilmenge von $\mathbb{R}$ an, die kein Intervall ist und auch nicht mit $\varnothing$ oder $\mathbb{R}$ übereinstimmt.
- Wie lässt sich die Stetigkeit einer Abbildung $f : X \to Y$ in einem Punkt $a \in X$ mit Hilfe des Umgebungsbegriffs charakterisieren? Welcher Zusammenhang besteht zwischen der Stetigkeit einer Abbildung $f : X \to Y$ und offenen Teilmengen von X bzw. Y?

- Wie kann die Abgeschlossenheit einer Teilmenge A eines metrischen Raums (X, d_X) mit Hilfe von Folgen getestet werden?
- Welches Kriterium verwendet man, um die relative Offenheit oder Abgeschlossenheit einer Menge U in einer Teilmenge Y eines metrischen Raum (X, d_X) zu überprüfen?
- Gibt es eine Teilmenge des Einheitsquadrats $Q = [0, 1] \times [0, 1]$, die zwar relativ offen in Q, aber nicht offen in $\mathbb{R}^2$ ist?
- Welche konkreten Beispiele für kompakte Teilmengen eines metrischen Raums sind Ihnen bekannt?
- Durch welche beiden Eigenschaften sind die kompakten Teilmengen im $\mathbb{R}^n$ charakterisiert?
- Formulieren Sie den Satz von Bolzano-Weierstrass und das Maximumsprinzip für metrische Räume. Leiten Sie die entsprechenden Sätze aus der Erstsemester-Vorlesung aus der allgemeinen Version für metrische Räume ab.
- Welcher Zusammenhang besteht zwischen kompakten Mengen und gleichmäßiger Stetigkeit von Abbildungen?
- Was sind die zusammenhängenden Teilmengen des metrischen Raums $(\mathbb{R}, d)$, wobei die Metrik d durch $d(a, b) = |a - b|$ gegeben ist?
- Warum sind offene und abgeschlossene Bälle im $\mathbb{R}^n$ bezüglich einer beliebigen Norm $\|\cdot\|$ immer wegzusammenhängend?
- Wie lautet der Zwischenwertsatz für reellwertige Funktionen auf Teilmengen des $\mathbb{R}^n$?

Teil 3: Differenzialrechnung

- Wie lassen sich Richtungsableitungen und partielle Ableitungen berechnen?
- Unter welchen Voraussetzungen sind partielle Ableitungen vertauschbar, gilt also $\partial_{ij} f = \partial_{ji} f$ für alle i, j?
- Wenn für eine Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ in einem Punkt a beide partiellen Ableitungen existieren, ist sie dann im Punkt a immer auch stetig?
- Nach Definition ist die Ableitung der Funktion

  $$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \quad , \quad (x, y) \mapsto (x^2 - 2xy + 5y^2, xy + 5y)$$

  im Punkt $(3, 5)$ eine lineare Abbildung. Zwischen welchen Vektorräumen ist diese lineare Abbildung definiert? Was ist das Bild des Vektor $v = (-1, 3)$ unter der linearen Abbildung $f'(3, 5)$?
- Inwiefern ist die totale Differenzierbarkeit einer Funktion f in einem Punkt a eine Verallgemeinerung des Differenzierbarkeitsbegriff aus der Analysis einer Variablen? Wie kann insbesondere die Ableitung $f'(a)$ einer Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ in einem Punkt $a \in \mathbb{R}$ als lineare Abbildung interpretiert werden?
- Welcher Zusammenhang besteht zwischen der (totalen) Ableitung $f'(a)$ und den Richtungsableitungen $\partial_v f(a)$?
- Welches hinreichende Kriterium für totale Differenzierbarkeit wurde in der Vorlesung behandelt?

- Welche vier Ableitungsregeln für höherdimensionale Funktionen gibt es (die unter denselben Namen auch schon in der Analysis einer Variablen vorkamen)?
- Wie lautet ein notwendiges Kriterium für lokale Extrema? Zeigen Sie anhand eines Beispiels, dass dieses Kriterium nicht hinreichend ist.
- Welches hinreichende Kriterium für ein lokales Maximum/Minimum wurde in der Vorlesung behandelt? Gibt es auch ein Kriterium, mit dem man ein lokales Extremum an einer Stelle ausschließen kann?
- Was besagt der Satz über die lokale Umkehrbarkeit? Wäre der Satz über die lokale Umkehrbarkeit zum Beispiel auch auf die Sinusfunktion $\sin : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ anwendbar? Falls ja, welches Ergebnis würde er liefern?
- Was benötigt man für die implizite Definition einer stetig differenzierbaren Funktion $f : I' \to I''$ zwischen zwei Intervallen $I', I'' \subseteq \mathbb{R}$? Warum kann jede stetig differenzierbare Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ auch als implizit definierte Funktion aufgefasst werden?
- Was ist nach dem Satz über implizite Funktionen ein hinreichendes Kriterium dafür, damit eine Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ eine Funktion $f : I' \to I''$ implizit definiert? Auf welche konkreten Beispiele haben wir den Satz in der Vorlesung und in den Übungen angewendet?
- Welche konkreten Beispiele für Untermannigfaltigkeiten des $\mathbb{R}^n$ sind Ihnen bekannt?
- Geben Sie ein konkretes Beispiel für eine 1-dimensionale Untermannigfaltigkeit $M \subseteq \mathbb{R}^2$ und eine stetig differenzierbare Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ an mit der Eigenschaft, dass zwar die Funktion $f|_M$, aber nicht die Funktion f auf M ein lokales Extremum besitzt.
- Überprüfen Sie, dass in Ihrem konkreten Beispiel das hinreichende Kriterium für Extrema mit Nebenbedingungen erfüllt ist.

Teil 4: Integralrechnung

- Bestimmen Sie Unter- und Obersumme der Funktion $f : [0,2] \times [0,2] \to \mathbb{R}$, $(x,y) \mapsto x+y$ bezüglich der Zerlegung $\mathcal{Z} = (\mathcal{Z}_1, \mathcal{Z}_2)$ gegeben durch $\mathcal{Z}_1 = \mathcal{Z}_2 = \{1\}$.
- Warum können Untersummen bei Übergang zu einer feineren Zerlegung größer werden, aber nicht kleiner?
- Können die Untersummen bei einer beschränkten Funktion auch beliebig groß werden? Falls nicht, wie kann man für die Untersummen eine obere Schranke bestimmen?
- Stellen Sie das Integral $\int_{[0,1]^4} (xyzw)\, d(x,y,z,w)$ mit dem Satz von Fubini als Verschachtelung zweier zweidimensionaler Integrale dar. Berechnen Sie das Integral, indem Sie mit dieser Darstellung arbeiten (und nochmals den Satz von Fubini anwenden).
- Geben Sie ein konkretes Beispiel für eine unendliche Jordansche Nullmenge in $\mathbb{R}^2$ an. Gibt es auch in $\mathbb{R}$ eine unendliche Jordansche Nullmenge? (Betrachten Sie $\{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\}$.)

(c) Beweis- und Rechentechniken

Die Angaben in Klammern verweisen auf die Übungsaufgaben (zum Beispiel G1A3 = Globalübungsblatt 1, Aufgabe 3).

Teil 1: Lineare Algebra

- Beweisaufgaben zum Thema nilpotente Matrizen und Jordansche Normalform (T1A1, G1A1)
- Beispiele für Matrizen mit gegebenem charakteristischen Polynom, Minimalpolynom und/oder Haupt- bzw. Eigenräumen bestimmter Dimension (T1A1, T1A2, G1A2)
- Berechnung von Haupträumen (T1A3)
- Berechnung von Minimalpolynomen (G1A3)
- Bestimmung einer Jordanbasis (T1A3, G1A3)
- Berechnung des Abstands affiner Unterräume (T2A1, G2A1)
- Beweisaufgaben zur euklidischen Geometrie (T2A2, G2A2)
- Aufgaben zur Dreiecksgeometrie (T2A3, G2A3)
- Nachweis von Bilinearformen und Skalarprodukten (T3A1, G3A1)
- Berechnung von Darstellungsmatrizen von Bilinearformen (T3A2, G3A2)
- Hurwitz-Kriterium und Gram-Schmidt-Verfahren (T3A3, G3A3)
- Rechenaufgaben zur Hauptachsentransformation (T4A1, G4A1)
- Nachweis orthogonaler und selbstadjungierter Abbildungen (T4A2, G4A2)

Teil 2: Topologische Eigenschaften metrischer Räume, Steitgkeit

- Beispiele für offene und abgeschlossene Bälle in metrischen Räumen (T5A2)
- elementare Beweis zu offenen und abgeschlossenen Bällen (T4A3, G4A3)
- Nachweis von Metriken (T5A1, G5A1)
- Aufgaben zur Äquivalenz von Normen (T5A3, G5A3)
- Beweisaufgaben zur Stetigkeit (T6A1, G6A1)
- Nachweis der Stetigkeit einer vorgegebenen Funktion (T6A2, G6A2)
- Aufgaben zum Banachschen Fixpunktsatz (T6A3, G6A3)
- Beweisaufgaben zur Offenheit (T7A1, G7A1)
- Nachweis von Offenheit und Abgeschlossenheit von konkret vorgegebenen Teilmengen eines metrischen Raums (T7A2, G7A2)
- Aufgaben zur Stetigkeit linearer Abbildungen (T7A3, G7A3)
- Nachweis von relativ offenen bzw. relativ abgeschlossenen Teilmengen (T8A1, G8A1)

- Beweisaufgaben zur Kompaktheit (T8A2, G8A2, T8A3, G8A3)
- Nachweis von Zusammenhang und Wegzusammenhang in konkreten Situationen (T9A1, G9A1)

Teil 3: Differenzialrechnung

- Berechnung von Richtungsableitungen (T9A2, T9A3, G9A2, G9A3, T10A1, G10A3)
- Beweisaufgaben zur totalen Differenzierbarkeit (T10A2, G10A2)
- Nachweis der totalen Differenzierbarkeit in konkreten Situationen (T10A3, G10A3)
- Anwendung der Ableitungsregeln (T11A2, T11A3, G11A2, G11A3)
- Berechnung der zweiten Ableitung (T11A1, G11A1)
- Berechnung von höheren Ableitungen und Taylorpolynomen (T12A1, G12A1)
- Anwendung der Kriterien für lokale Extrema (T12A2, G12A2)
- Anwendung des Satzes über lokale Umkehrbarkeit (T12A3, G12A3)
- Anwendung des Satzes über implizit definierte Funktionen (T13A1, G13A1)
- Bestimmung von Extrema mit Nebenbedingungen (T13A2, G13A3)

Teil 4: Integralrechnung

- Berechnung von Unter- und Obersummen, Prüfung auf Riemann-Integrierbarkeit (T13A3, G13A2, T14A1, T14A2)
- Wiederholung: Anwendung eindimensionaler Integrationsregeln (T14A3)